

Algebra 1

3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 Zeigen Sie, dass für $n \geq 5$ die alternierende Gruppe A_n die einzige nicht triviale normale Untergruppe von S_n ist.

Aufgabe 3.2

- (i) Schreiben Sie die Permutation $(123)(2467)(1564) \in S_7$ als ein Produkt von disjunkten Zykeln.
- (ii) Schreiben Sie die Permutation $(123)(2467)(1564) \in S_7$ als ein Produkt von Transpositionen.
- (iii) Bestimmen Sie alle Konjugationsklassen der Gruppe S_4 .
- (iv) Wieviele Konjugationsklassen hat die Gruppe S_8 ?
- (v) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jede Involution $s \in S_n$, d.h. $s \neq e$ und $s^2 = e$, ein Produkt von paarweise kommutierenden Transpositionen ist.

Aufgabe 3.3 Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $G \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ eine endliche Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ die Matrix g diagonalisierbar ist und alle Eigenwerte von g in $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ liegen.

Aufgabe 3.4 Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Klassifizieren Sie alle Gruppen der Ordnung p^3 bis auf Isomorphie.

Abgabetermin: Mittwoch, den 05.11.2025 bis 16.00 Uhr im blauen Briefkasten 1 (auf dem Flur von D1).