Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2025/2026

# Algebra 1

## 7. Übungsblatt

**Aufgabe 7.1** Man zeige: Gegeben ein Körper $\mathbb{K}$ ist der KRing

$$\mathbb{K}[[X]] := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_n X^n : (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0} \right\}$$

der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$ ein Hauptidealring und die Ideale dieses KRings sind das Nullideal sowie die Ideale $X^n\mathbb{K}[[X]]$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wie sieht die Primfaktorzerlegung in diesem Ring aus?

(Hinweis: Beweisen Sie zuerst, dass

$$\mathbb{K}[[X]]^\times = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_n X^n : (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}, a_0 \neq 0 \right\}$$

gilt.)

**Aufgabe 7.2** Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $P \in \mathbb{K}[X]$ ein irreduzibles Polynom mit $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{K}[X]/\langle P\rangle$ ein Körper ist, welcher $\mathbb{K}$ enthält und dass

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X]/\langle P\rangle) = n$$

ist.

**Aufgabe 7.3** Zeigen Sie, dass $X^2 + Y^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X, Y]$ irreduzibel ist.

(Hinweis: $Y^2 + 1 \in \mathbb{Q}[Y]$ ist irreduzibel und Eisensteinkriterium)

**Aufgabe 7.4** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Phi_n \in \mathbb{C}[X]$ das $n$-te Kreisteilungspolynom. Zeigen Sie, dass bereits $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ gilt.

**Abgabetermin**: Mittwoch, den 03.12.2025 bis 16.00 Uhr im blauen Briefkasten 1 (auf dem Flur von D1).