Universität Paderborn Wintersemester 2025/2026
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Algebra 1

8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1 Zeigen Sie, dass die zyklotomischen Polynome Φ_n für $n > 1$ die folgenden Eigenschaften besitzen:

1. $\Phi_{2m} = \Phi_m(-X)$ für m ungerade.
2. $\Phi_m(X^p) = \Phi_m(X)\Phi_{mp}(X)$ für alle Primzahlen p, welche m nicht teilen.
3. $\Phi_n(X) = \Phi_m(X^{n/m})$, falls m das Produkt aller Primzahlen ist, welche n teilen.
4. $\Phi_n(0) = 1$ und somit $\Phi_n(X^{-1})X^{\Phi(n)} = \Phi_n(X)$.
5. $\Phi_n(1) = p$, falls n eine Potenz einer Primzahl p ist.
6. $\Phi_n(1) = 1$, falls n keine Primzahlpotenz ist.

Aufgabe 8.2 Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gilt
$$\Phi_{15}(X) = X^8 - X^7 + X^5 - X^4 + X^3 - X + 1.$$
2. Für Primzahlen $p \neq q$ haben alle Koeffizienten von $\Phi_{pq}(X)$ Betrag Eins. (Hinweis: Betrachten Sie die Identität
$$\Phi_{pq}(X) = (1 - X)(\Phi_q(X^p)(1 - X^q)^{-1})$$
im Ring der Potenzreihen $\mathbb{C}[[X]]$.)
3. Die kleinste natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ für die nicht alle Koeffizienten von Φ_n Betrag Eins haben ist $n = 105$. Des Weiteren ist $\deg(\Phi_{105}) = 48$ mit $\Phi_{105}(X) = \sum_{j=0}^{48} a_j X^j$ wobei $a_{41} = -2$ gilt.
(Anmerkung: I. Schur hat gezeigt, dass die Koeffizienten von Φ_n für $n \to \infty$ beliebig groß werden können.)

Aufgabe 8.3 Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n) := \mathrm{Pol}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ die $\mathbb{C}$-Algebra der Polynomfunktionen auf $\mathbb{C}^n$.

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$i : \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(\mathbb{C}^n), \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)), f \mapsto [g \mapsto fg]$$
ein injektiver Homomorphismus von $\mathbb{C}$-Algebren ist.

Von nun an identifizieren wir $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ und $\mathrm{Bild}(i)$ miteinander. Sei
$$A_n^{\leq 0} := \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(\mathbb{C}^n), \mathcal{O}(\mathbb{C}^n))$$
und definiere rekursiv die $\mathbb{C}$-Vektorräume
$$A_n^{\leq m} : \{D \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(\mathbb{C}^n), \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)) : [D, f] \in A_n^{\leq m-1}\ \forall\, f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)\} \qquad (m \in \mathbb{N}_{>0})$$
(Hierbei ist $[S, T] := ST - TS$ für $S, T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(\mathbb{C}^n), \mathcal{O}(\mathbb{C}^n))$).

(ii) Sei $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(\mathbb{C}^n), \mathcal{O}(\mathbb{C}^n))$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen $T : \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, sodass $T(fg) = T(f)g + fT(g)$ für alle $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Zeigen Sie, dass

$$A_n^{\leq 1} = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \oplus \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(\mathbb{C}^n))$$

gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass

$$A_n^k A_n^l = A_n^{k+l}$$

für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(iv) Es sei

$$A(\mathbb{C}^n) := \bigcup_{m=0}^{\infty} A_n^{\leq m}.$$

Zeigen Sie, dass $A_n(\mathbb{C}^n)$ eine $\mathbb{C}$-Unteralgebra von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(\mathbb{C}^n), \mathcal{O}(\mathbb{C}^n))$ ist und dass $A_n(\mathbb{C})$ als $\mathbb{C}$-Algebra erzeugt wird von $A_n^{\leq 1} = \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \oplus \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(\mathbb{C}^n))$.

Die Algebra $A(\mathbb{C}^n)$ wird **n-te Weylalgebra** genannt.

(v) Für $i \in \{1, \cdots, n\}$ sei $\partial_i \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(\mathbb{C}^n))$ die i-te Richtungsableitung und für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ sei $x^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ und $\partial^\beta := \prod_{i=1}^n \partial_i^{\beta_i}$. Zeigen Sie, dass $\{x^\alpha \partial^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n, |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i \leq m\}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $A_n^{\leq m}$ ist. Folgern Sie hieraus, dass $\{x^\alpha \partial^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $A(\mathbb{C}^n)$ ist. Bestimmen Sie zusätzlich eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(\mathbb{C}^n))$.

Abgabetermin: Mittwoch, den 10.12.2025 bis 16.00 Uhr im blauen Briefkasten 1 (auf dem Flur von D1).