Universität Paderborn Wintersemester 2025/2026
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Algebra 1

5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Zeigen Sie: Ist G eine endliche Untergruppe der Gruppe der multiplikativ invertierbaren Elemente $\mathbb{K}^\times$ eines Körpers $\mathbb{K}$, so ist G zyklisch.

(Lösungsvorschlag 1: Nach dem Hauptsatz über die endlich erzeugten abelschen Gruppen existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$, Primzahlen $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{N}$ und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, sodass $G \cong \prod_{i=1}^k \mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z}$ gilt. Zeigen Sie, dass aufgrund der gegebenen Voraussetzungen der Behauptung die p_i's paarweise verschieden sein müssen und folgern Sie, dass G zyklisch ist.

Lösungsvorschlag 2: Beweisen Sie zuerst für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Identität $n = \sum_{d|n} \phi(d)$, wobei ϕ die Eulersche Phi-Funktion bezeichnet. Zeigen Sie anschließend, dass jede Gruppe G' mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen, sodass für jeden Teiler $d \,|\, n$ die Abschätzung $\#\{x \in G' : x^d = 1\} \leq d$ gilt, zyklisch ist und folgern Sie schließlich, dass die Gruppe G als endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe eines Körpers zyklisch sein muss.)

Aufgabe 5.2 Sei I ein minimales Linksideal in einem Ring R und es gelte $I^2 \neq \{0\}$. Zeigen Sie: Es existiert ein idempotentes Element $e \in I$, also ein Element $e \in I$ mit $e^2 = e$, sodass $I = Re$ und eRe ein Schiefkörper mit neutralem Element e der Multiplikation ist.

(Lösungsvorschlag: Zeigen Sie mittels der Minimalität von I, dass ein $x \in I$ existiert, sodass $Ix = \{rx : r \in I\}$ gleich I ist. Damit muss dann ein $0 \neq e \in I$ existieren mit $ex = x$. Zeigen Sie erneut mittels der Minimalität von I, dass dann automatisch $e^2 = e$ und $I = Re$ gilt. Um zu zeigen, dass eRe ein Schiefkörper mit neutralem Element e der Multiplikation ist, folgert man für ein $0 \neq b \in eRe$ mittels der Minimalität von I zuerst $Rb = Re$. Damit existiert dann ein $s \in R$ mit $e = sb$. Zeigen Sie, dass dann $c = ese$ ungleich Null und ein Linksinverses von b ist. Nach dem bisher gezeigten, hat c dann ebenfalls ein Linksinverses in eRe, welches wir mit d bezeichnen. Zeigen Sie anschließend, dass bereits $d = b$ gilt. Demnach ist c dann auch ein Rechtsinverses von b. Folglich ist eRe ein Schiefkörper.

Anmerkung: Mit der in Aufgabe 5.2 gezeigten Aussage, kann bewiesen werden, dass zu jeder endlich dimensionalen einfachen K-algebra A (über einem Körper K) ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Schiefkörper S über K existiert, sodass

$$A \cong M_{n\times n}(S)$$

als K-Algebren gilt.)

Aufgabe 5.3 Sei $R \neq 0$ ein Ring und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, dass $M_n(R)$ ein Ring ist und dass für $n > 1$ der Ring $M_n(R)$ nie ein Kring ist, auch dann nicht wenn R ein Kring ist.

Aufgabe 5.4 Zeigen Sie, dass der Kring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht faktoriell ist.

Aufgabe 5.5 Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$, sodass $12k \equiv 5\,(7)$, $7k \equiv 3\,(9)$ und $13k \equiv 2\,(5)$ gilt.

Abgabetermin: Mittwoch, den 19.11.2025 bis 16.00 Uhr im blauen Briefkasten 1 (auf dem Flur von D1).