Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2025/2026

# Algebra 1

## 9. Übungsblatt

**Aufgabe 9.1** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $A_n(\mathbb{C})$ die $n$-te Weylalgebra aus Aufgabe 8.3.

1. Zeigen Sie, dass in $A(\mathbb{C}^n)$ keine beidseitigen Ideale außer $\{0\}$ und $A(\mathbb{C}^n)$ existieren, also dass $A(\mathbb{C}^n)$ einfach ist.
2. Sei $F$ ein Linksmodul über $A(\mathbb{C}^n)$ und $I \subseteq A(\mathbb{C}^n)$ ein Linksideal. Zeigen Sie, dass

   $$\mathrm{Hom}_{A(\mathbb{C}^n)}(A(\mathbb{C}^n)/I, F) \to \{f \in F : Pf = 0\ \forall P \in I\}, \phi \mapsto \phi(1+I)$$

   einen $\mathbb{C}$-Vektorraumisomorphismus ist.
3. Zeigen Sie, dass das $A(\mathbb{C}^n)$-Linksmodul $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ isomorph zum $A(\mathbb{C}^n)$-Linksmodul $A(\mathbb{C}^n)/(\sum_{i=1}^n A(\mathbb{C}^n)\partial_i)$ ist.
4. Zeigen Sie, dass $A(\mathbb{C}^n)/(\sum_{i=1}^n A(\mathbb{C}^n)\partial_i) \not\cong A(\mathbb{C}^n)/(\sum_{i=1}^n A(\mathbb{C}^n)x_i)$ als $A(\mathbb{C}^n)$-Linksmoduln.
5. Sei $M$ ein $A(\mathbb{C}^n)$-Linksmodul. Zeigen Sie, dass $\dim_{\mathbb{C}}(M) < \infty$ bereits $M = \{0\}$ impliziert.

**Aufgabe 9.2** Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $1 + i \in \mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$.

Zeigen Sie zusätzlich die folgenden Aussagen:

1. $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
2. Gegeben Körper $K \subset L$ mit einer von zwei verschiedenen Charakteristik und $\alpha, \beta \in L^\times$ mit $\alpha^2, \beta^2 \in K$, so gilt $K(\alpha) = K(\beta)$ genau dann wenn $\frac{\alpha}{\beta} \in K$.
3. Jedes Element von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ lässt sich eindeutig schreiben in der Form $a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Bestimmen sie zusätzlich das Inverse von $7 + \sqrt[3]{2}$ in dieser Form.
4. Gegeben eine Körpererweiterung $K \subset L$ und ein $\alpha \in L$, welches algebraisch ist über $K$, so stimmt das Minimalpolynom von $\alpha$ über $K$ mit dem charakteristischen Polynom der $K$-linearen Abbildung $m_\alpha : K(\alpha) \to K(\alpha), x \mapsto \alpha x$ des endlich dimensionalen $K$-Vektorraums $K(\alpha)$ bis auf ein Vorzeichen überein. (Hinweis: Cayley-Hamilton)

**Aufgabe 9.3** Zeigen Sie, daß das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ nicht in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, daß für jede Einheitswurzel $\zeta$ das Minimalpolynom von $\zeta$ über $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}(\zeta)$ in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, daß für $\zeta$ eine nichttriviale dritte Einheitswurzel und $K := \mathbb{Q}(\zeta)$ das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ über $K$ in $K(\sqrt[3]{2})$ in Linearfaktoren zerfällt.

**Aufgabe 9.4** Ist $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$? Wenn ja, bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha$ über $\mathbb{Q}$. Gilt $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$?

**Abgabetermin**: Mittwoch, den 17.12.2025 bis 16.00 Uhr im blauen Briefkasten 1 (auf dem Flur von D1).