Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Sommersemester 2021

Analysis 4

10. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 10.1 (Jensensche Formel)

1. Zeigen Sie, dass
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|1-e^{i\theta}|d\theta = 0.$$

2. Seien $R \in \mathbb{R}_{>0}$, $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f(0) \neq 0$, $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < R$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ die Nullstellen von f in $B_r(0)$ gelistet nach Vielfachheit. Zeigen Sie, dass dann die **Jensensche Formel**
$$|f(0)| \prod_{n=1}^{N} \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta\right)$$
gilt.

3. Sei f eine ganze Funktion, $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $M(r) = \sup\{|f(re^{i\theta})| : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $n(r)$ die Anzahl der Nullstellen mit Vielfachheit von f in $B_r(0)$. Angenommen $f(0) = 1$. Zeigen Sie, dass
$$n(r)\log 2 \leq \log M(2r)$$

Präsenzaufgabe 10.2 (Hadamardscher Faktorisierungssatz) Sei $0 \neq f$ eine ganze Funktion von Ordnung $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, m die Ordnung der Nullstelle bei 0 und $a_1, a_2, \dots$ die von Null verschiedenen Nullstellen von f gelistet mit Vielfachheiten. Dann existiert ein $g \in \mathbb{C}[z]$ mit $\deg(g) \leq \rho$, sodass
$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{\lfloor \rho \rfloor}\left(\frac{z}{a_n}\right).$$

Hausaufgabe 10.1 Sei $1 > r > 0$ und

$$\phi_r : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}_{>0},\ e^{it} \mapsto \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}.$$

Man zeige:

1. Ist $e^{it} \neq 1$, so gilt $\lim_{r\uparrow 1} \phi_r(e^{it}) = 0$.
2. $\lim_{r\uparrow 1} \phi_r(1) = \infty$.
3. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi_r(e^{it})\,dt = 1$.
4. Für jedes $h \in C(\mathbb{S}^1)$ gilt
$$h(1) = \lim_{r\uparrow 1} \int_0^{2\pi} \phi_r(e^{it})h(e^{it})\,dt.$$
5. $\forall \epsilon > 0\ \exists\ 1 > R_\epsilon \geq 0\ \forall\ 1 > r > R_\epsilon\ \forall\ e^{it} \in \mathbb{S}^1 \setminus e^{i[-\epsilon,\epsilon]} : |\phi_r(e^{it})| < \epsilon.$

   Folgern Sie, dass $(\phi_r)_{r\uparrow 1}$ eine um 1 zentrierte Dirac-Folge in $\mathbb{S}^1$ ist.

Hausaufgabe 10.2 Man zeige, daß für $U \subset \mathbb{C}$ wegweise einfach zusammenhängend eine stetige komplexwertige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ genau dann harmonisch ist, wenn sie als Summe einer holomorphen Funktion mit einer antiholomorphen Funktion dargestellt werden kann.