Universität Paderborn Sommersemester 2021
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Analysis 4

11. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 11.1 Sei f eine nicht konstante ganze Funktion von Ordnung λ mit $f(0) \neq 0$. Seien $a_1, a_2, \dots$ die Nullstellen gelistet mit Vielfachheit, sodass $|a_i| \leq |a_{i+1}|$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt.

1. Zeigen Sie, dass für jedes ganzzahlige $p > \lambda - 1$

$$\left(\frac{d^p}{dz^p}\frac{f'}{f}\right)(z) = -p! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a_n - z)^{p+1}} \qquad (z \neq a_k, k \in \mathbb{N})$$

gilt.

2. Im Beweis des Hadamardschen Faktorisierungssatz haben wir gezeigt, dass $\mathrm{Rang}(f) = r \leq \lfloor \lambda \rfloor$, also $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-(\lfloor \lambda \rfloor + 1)} < \infty$ gilt. Sei

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_r\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

die zugehörige Standardform von f. Zeigen Sie, dass

$$\left(\frac{d^p}{dz^p}\frac{P'}{P}\right)(z) = -p! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a_n - z)^{p+1}} \qquad (z \neq a_k, k \in \mathbb{N})$$

für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ mit $p \geq r$ gilt.

Präsenzaufgabe 11.2 Sei

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \qquad (s \in \mathbb{C}).$$

und $\mathcal{S} := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$. Dann gilt $\xi \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $\xi(s) = \xi(1-s)$ und alle Nullstellen von ξ liegen in $\mathcal{S}$. Seien $\rho_1, \rho_2, \dots$ die Nullstellen von ξ gelistet mit Vielfachheiten. Zeigen Sie:

1. $\mathrm{ord}(f) = 1$

2. ξ hat die Hadamard-Faktorisierung

$$\xi(s) = e^{Bs} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{s}{\rho_n}) e^{s/\rho_n} \qquad (s \in \mathbb{C}).$$

mit $B = -\frac{1}{2}\gamma - 1 + \frac{1}{2}\log(4\pi)$, wobei γ die Euler-Mascheroni Konstante bezeichnet.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n|^{-1} = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n|^{-(1+\epsilon)} < \infty$ für alle $\epsilon > 0$. Insbesondere hat ξ unendlich viele Nullstellen, womit auch ζ unendlich viele Nullstellen in $\mathcal{S}$ besitzt.

4.
$$\zeta(s) = \frac{e^{(\log(2\pi) - 1 - \gamma/2)s}}{2(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{s}{\rho_n}) e^{s/\rho_n} \qquad (s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}).$$

Erinnerung: Hadamardscher Faktorisierungssatz

Sei f eine ganze Funktion. Ist f von endlicher Ordnung λ, so hat f endlichen Genus $\mu \leq \lambda$.

Hausaufgabe 11.1 Sei f eine nicht-konstante ganze Funktion von endlicher Ordnung. Zeigen Sie

$$|\,\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})\,| \leq 1.$$

Diese Aussage ist ohne die Voraussetzung der endlichen Ordnung auch als **kleiner Satz von Picard** bekannt.

Hausaufgabe 11.2 Sei f eine ganze Funktion von endlicher Ordnung $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

1. Zeigen Sie, dass f unendlich viele Nullstellen besitzt.
2. Zeigen Sie, dass f jeden Wert unendlich oft annimmt.

Hausaufgabe 11.3 Zeigen Sie, dass $\zeta(s) < 0$ für alle $s \in [0, 1)$.