Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Sommersemester 2021

Analysis 4

12. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 12.1 Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Primzahlen und

$$\theta(x) := \sum_{p\in\mathcal{P}:p\leq x} \log(p)$$

für $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert mit

$$Cx \leq \theta(x)$$

für alle $x > 2$.

Präsenzaufgabe 12.2 Sei $\mathcal{A} := \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Für $f, g \in \mathcal{A}$ ist die Faltung von f und g gegeben durch

$$f * g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

1. Sei $\delta \in A$ gegeben durch $\delta(n) = \delta_{1n}$. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{A}, +, *)$ ein kommutativer Ring mit Einselement δ ist.

2. Ein $f \in \mathcal{A}$ wird multiplikativ genannt, falls f nicht konstant Null ist und $f(nm) = f(n)f(m)$ für alle teilerfremden $n, m \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie, dass die Faltung von multiplikativen Funktionen wieder multiplikativ ist.

3. Zeigen Sie $\mathcal{A}^\times = \{f \in \mathcal{A} : f(1) \neq 0\}$

4. Zeigen Sie, dass die Menge der multiplikativen Funktionen eine Untergruppe von $\mathcal{A}^\times$ bildet.

5. Sei $\epsilon \in \mathcal{A}$ gegeben durch $\epsilon(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist ϵ multiplikativ. Zeigen Sie, dass die Inverse von ϵ gegeben ist durch

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \exists p \in \mathcal{P} : p^2 \mid n \\ (-1)^r & n = p_1 \dots p_r, \text{ mit teilerfremden Primzahlen } p_i \end{cases}.$$

   Die Inverse μ wird auch Möbiusfunktion genannt.

6. Seien $f, g \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie: Es gilt genau dann

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$, falls

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d)f(n/d) = \sum_{d|n} f(d)\mu(n/d)$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

7. Sei ϕ die Eulersche-Phi-Funktion. Zeigen Sie

$$\phi(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d)d.$$

8. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-s}$ in $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 1\}$ eine holomorphe Funktion in s ist und dass

$$\frac{1}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-s}$$

gilt.

Hausaufgabe 12.1 Es sei $\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}, (x \geq 2)$. Zeigen Sie:

1. $\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}$
2. $\mathrm{Li}(x) = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \sum_{j=2}^n \frac{(j-1)x}{(\log x)^j} - \frac{(j-1)2}{(\log 2)^j} + \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. $\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^{n+1}} \leq C \frac{x}{(\log x)^{n+1}}$
4. $\frac{\mathrm{Li}(x)}{x/\log x} = 1 + \frac{2}{\log x} + \cdots + \frac{n}{(\log x)^n} + O\left(\frac{1}{(\log x)^{n+1}}\right)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Hausaufgabe 12.2 Zeigen Sie $\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log(2\pi)$.