Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Sommersemester 2021

Analysis 4

2. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 2.1 Sei $\emptyset \neq U \subset \mathbb{C}$ offen, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : U \times [a, b] \to \mathbb{C}$, $(z, t) \mapsto f(z, t)$ stetig. Ist f für alle t holomorph in z und $\frac{\partial f}{\partial z} : U \times [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig, so ist auch die Abbildung $F : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_a^b f(z, t)dt$ holomorph und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial z}(w) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(w, t)dt$$

für alle $w \in U$.

Präsenzaufgabe 2.2 Man zeige, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ der Hauptzweig des Logarithmus von $1 + z$ dargestellt werden kann durch die Potenzreihe

$$\log(1 + z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} z^j.$$

Präsenzaufgabe 2.3 Sei $V \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $u \in C^2(V)$ harmonisch. Zeigen Sie, dass ein $F \in \mathcal{O}(V)$ existiert mit $\mathrm{Re}(F) = u$.

Hausaufgabe 2.1 Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $w : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ mit $w(z)^2 = z$ geben kann.

Hinweis: Angenommen es gäbe eine solche Funktion w. Dann gilt $w(z^2) = \pm z$ für alle $z \in \mathbb{C}^\times$. Damit wäre die Funktion $\epsilon : \mathbb{C}^\times \to \{-1, 1\}$ stetig. Führen Sie diese Beobachtung zum Widerspruch.

Hausaufgabe 2.2 Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $1/(1 + x^4)$.

Hausaufgabe 2.3 In einem regelmäßigen Siebeneck sei a der Abstand von einer Ecke zur nächsten Ecke, b der Abstand zur übernächsten Ecke, und c der Abstand zur überübernächsten Ecke. Man zeige

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

In Formeln zeige man für $\zeta := e^{2\pi i/7}$ die Identität

$$\frac{1}{|1-\zeta|} = \frac{1}{|1-\zeta^2|} + \frac{1}{|1-\zeta^3|}.$$