Universität Paderborn Sommersemester 2021
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Analysis 4

3. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 3.1 Sei γ ein stetig differenzierbarer geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und U das Komplement seines Bildes. Man zeige, dass die Funktion $u_\gamma : U \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$u_\gamma(w) := \int_\gamma \frac{dz}{z-w}$$

lokal konstant ist, als da heißt holomorph mit Ableitung Null.

Präsenzaufgabe 3.2 Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$ fixiert und $I = [0,1]$. Wir nennen

$$\Omega(X, x_0) := \{\gamma : I \to X : \gamma \text{ stetig}, \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$$

Schleifenraum von (X, x_0).

Seien $\gamma, \eta \in \Omega(X, x_0)$. Wir nennen γ homotop zu η, falls eine stetige Abbildung

$$H : I \times I \to X$$

existiert, sodass $H(s,0) = \gamma(s)$ und $H(s,1) = \eta(s)$ für alle $s \in I$ und sodass $H(0,t) = x_0 = H(1,t)$ für alle $t \in I$ gilt.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\gamma \sim \eta :\Longleftrightarrow \gamma \text{ ist homotop zu } \eta$$

eine Äquivalenzrelation auf $\Omega(X, x_0)$ definiert.

Sei

$$\pi_1(X, x_0) := \Omega(X, x_0)/\sim$$

die Menge der Äquivalenzklassen der in (i) eingeführten Äquivalenzrelation auf $\Omega(X, x_0)$. Ist $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, so bezeichnen wir die zugehörige Äquivalenzklasse mit $[\gamma]$.

(ii) Seien $\gamma, \eta \in \Omega(X, x_0)$. Zeigen Sie, dass

$$\gamma \circ \eta(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \eta(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

in $\Omega(X, x_0)$ liegt.

Zeigen Sie als Nächstes, dass für $\gamma, \gamma', \eta, \eta' \in \Omega(X, x_0)$

$$[\gamma] = [\gamma'] \wedge [\eta] = [\eta'] \Rightarrow [\gamma \circ \eta] = [\gamma' \circ \eta']$$

gilt.

(iii) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung

$$\star : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$
$$([\gamma], [\eta]) \mapsto [\gamma \circ \eta] =: [\gamma] \star [\eta]$$

eine Gruppenstruktur auf $\pi_1(X, x_0)$ induziert.

(iv) Sei Y ein weiterer topologischer Raum, $y_0 \in Y$ fixiert und $f : X \to Y$ stetig mit $f(x_0) = y_0$. Zeigen Sie, dass

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), \ [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Hausaufgabe 3.1 Man zeige, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(z-x)^2} dx$ nicht von $z \in \mathbb{C}$ abhängt.

Hausaufgabe 3.2 Man zeige, dass der Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

existiert.

Hausaufgabe 3.3 Die folgende Hausaufgabe ist eine Fortsetzung der Präsenzaufgabe 3.2.

(v) Seien $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen mit $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$. Es existiere eine stetige Abbildung

$$H : X \times I \to Y$$

mit $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$ und $H(x_0,t) = y_0$ für alle $t \in I$.
Zeigen Sie die Identität

$$f_* = g_*.$$

(vi) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig und $x_0 \in X$. Man zeige

$$\pi_1(X, x_0) = \{1\}.$$

(vii) Man zeige

$$\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, 1).$$