Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Sommersemester 2021

Analysis 4

4. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 4.1 Für $n \in \mathbb{Z}$ sei $e_n : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ gegeben durch $e_n(t) := e^{2\pi int}$. Zeigen Sie, dass

$$\phi : \mathbb{Z} \to \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1),\ n \mapsto [e_n]$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

Präsenzaufgabe 4.2 Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $K \subset U$ ein nichtleeres Kompaktum. Zeigen Sie, dass ein $p \in \partial K$ existiert, sodass $|f(p)| \geq |f(k)|$ für jedes $k \in K$.

Präsenzaufgabe 4.3 Zeigen Sie, dass jede nicht konstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dichtes Bild hat.
(Hinweis: Für $w \notin f(\mathbb{C})$ betrachte man $g_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{f(z)-w}$.)

Hausaufgabe 4.1 Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und invariant unter komplexer Konjugation. Wir zerlegen U in seinen Schnitt mit der reellen Achse und der oberen und unteren Halbebene in der Form

$$U = U^+ \sqcup (U \cap \mathbb{R}) \sqcup U^-$$

mit $U^\pm := \{u \in U : \pm \mathrm{Im}(u) > 0\}$. Man zeige: Ist $f : U^+ \sqcup (U \cap \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ stetig, holomorph in U^+ und reellwertig auf $U \cap \mathbb{R}$, so ist die Funktion

$$\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$$

mit

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & z \in U^+ \sqcup (U \cap \mathbb{R}) \\ \overline{f(\overline{z})} & z \in U^- \end{cases}$$

holomorph.

Hausaufgabe 4.2 Man zeige, dass eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ für die ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert, sodass $|f(z)|/|z^n|$ für $|z| > 1$ beschränkt bleibt, ein Polynom vom Grad $\leq n$ sein muss.