Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Sommersemester 2021

Analysis 4

5. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 5.1 Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und nichtleer. Die Gruppe der biholomorphen Abbildungen $D \to D$ wird mit $\mathrm{Aut}(D)$ bezeichnet. Sei $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene.

(a) Es sei $\mathrm{SU}(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$. Zeigen Sie, dass

$$\phi : \mathrm{SU}(1,1) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \mapsto \left[z \mapsto \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}} \right]$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker(\phi) = \{\pm \mathrm{Id}\}$ ist.

(b) Es sei $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und der Cayleyabbildung

$$C : \mathbb{H} \to \mathbb{E},\ z \mapsto \frac{z-i}{z+i},$$

dass

$$\psi : \mathrm{Sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left[z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right]$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker(\psi) = \{\pm \mathrm{Id}\}$ ist.

(c) Berechnen Sie die Untergruppe $\{T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) : T(i) = i\}$.

(d) Bestimmen Sie die Fixpunkte von $\left[z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right] \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ in $\mathbb{H}$ in Abhängigkeit von a, b, c, d.

Hausaufgabe 5.1 Es sei $S = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} < \mathrm{Re}(z) < \frac{\pi}{4}\}$ und $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Zeigen Sie, dass

$$f : S \to \mathbb{E},\ z \mapsto \tan(z)$$

biholomorph ist.
Zeigen Sie anschließend die Potenzreihenentwicklung

$$f^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

für $z \in \mathbb{E}$.

Hausaufgabe 5.2 Zeigen Sie: Besitzt eine holomorphe Funktion an einer Stelle eine wesentliche Singularität, so ist sie nicht injektiv. Hinweis: Man kombiniere den Satz von der Gebietstreue mit dem Satz von Casorati-Weierstraß.

Hausaufgabe 5.3 Man zeige, dass jede holomorphe injektive Abbildung $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ von der Gestalt $z \mapsto az + b$ ist für $a \in \mathbb{C}^{\times}, b \in \mathbb{C}$. Hinweis: Potenzreihenentwicklung und Hausaufgabe 5.2.