Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel Sommersemester 2021

Analysis 4

6. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 6.1 Gegeben eine rationale Funktion f ohne Polstellen auf der reellen Achse, bei der der Grad des Nenners größer ist als der Grad des Zählers, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\zeta\in\mathbb{H}} \mathrm{Res}_{z=\zeta} f(z)e^{iz}$$

in dem Sinne, dass sowohl $\lim_{r\to\infty}\int_0^r$ als auch $\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^0$ existieren und ihre Summe den angegebenen Wert hat.

Präsenzaufgabe 6.2

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ transitiv auf $\hat{\mathbb{C}}$ operiert. Zeigen Sie zudem, dass

$$\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})/P \to \hat{\mathbb{C}},\ gP \mapsto g.\infty$$

eine Bijektion ist, wobei $P \subset \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass die spezielle unitäre Gruppe

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C}) : |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

ebenfalls transitiv auf $\hat{\mathbb{C}}$ operiert und

$$\mathrm{SU}(2)/T \to \hat{\mathbb{C}},\ uT \mapsto u.0$$

eine Bijektion ist, wobei $T \subset \mathrm{SU}(2)$ die Untergruppe der Diagonalmatrizen bezeichnet.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}$ scharf dreifach transitiv auf $\hat{\mathbb{C}}$ operiert, d.h. zu jedem Paar von Tupeln (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) in $\hat{\mathbb{C}}^3$ mit $z_i \neq z_j$ und $w_i \neq w_j$ für $i \neq j$ existiert genau ein $g \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\}$, sodass $(g.z_1, g.z_2, g.z_3) = (w_1, w_2, w_3)$ gilt.

Präsenzaufgabe 6.3 Eine holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$$

wird *schlicht* genannt, falls sie injektiv ist und eine Potenzreihenentwicklung der Form $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$ mit $a_1 = 1$ und $a_j \in \mathbb{C}$ ($j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$) in $\mathbb{E}$ besitzt.
Zeigen Sie, dass die **Koebe**-Funktion

$$g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{z}{(1-z)^2}$$

schlicht ist mit Potenzreihenentwicklung $g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j z^j$.

Die **Biberbach** Vermutung, welche 1985 von Louis de Branges de Bourcia bewiesen wurde, besagt, dass für jede schlichte Funktion f mit Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ notwendigerweise

$$|a_j| \leq j$$

gelten muss. Die Koebe-Funktion zeigt, dass diese Abschätzung nicht verbessert werden kann.

Hausaufgabe 6.1 Man bestimme die Residuen der folgenden Funktionen in allen ihren Singularitäten:

(a) $\frac{1-\cos(z)}{z^3}$

(b) $\frac{z^2}{(1+z)^3}$

(c) $\frac{1}{(z^2+1)^3}$

(d) $\frac{e^z}{(z-1)^2}$

(e) $z\, e^{\frac{1}{z-1}}$

(f) $\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$

(g) $\frac{1}{\sin(\pi z)}$

(h) $\frac{1}{e^z+1}$

(i) $\frac{\cos(z)}{(z^2+1)^2}$

Hausaufgabe 6.2 Berechnen Sie mithilfe des Residuensatzes den Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx$.

Hausaufgabe 6.3 Berechnen Sie mithilfe von Präzenzaufgabe 6.1 den Wert des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} e^{ix}\, dx$.