Universität Paderborn Sommersemester 2021
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Analysis 4

7. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 7.1 Sei F eine meromorphe Funktion in $\mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. F ist holomorph in der rechten Halbebene $R := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$
2. F genügt der Funktionalgleichung $zF(z) = F(z+1)$
3. F ist beschränkt im Streifen $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 2\}$

Zeigen Sie, dass F bis auf eine multiplikative Konstante gleich der Gamma-Funktion ist:

$$F(z) = F(1)\Gamma(z).$$

Präsenzaufgabe 7.2 Sei ζ die Riemannsche Zeta-Funktion. Zeigen Sie

$$\zeta(-2k) = 0$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Präsenzaufgabe 7.3 Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$z + e^{-z} = 2021$$

in der rechten Halbebene R genau eine Lösung besitzt und diese sogar reell ist.

Hausaufgabe 7.1 Sei f eine ganze Funktion mit nach unten beschränkten Imaginärteil. Zeigen Sie, dass f konstant sein muss.

Hausaufgabe 7.2 Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Rouché die Anzahl der Nullstellen mit Vielfachheiten der Funktion $f(z) = e^z + 3z^5$ im offenen Einheitsball $\mathbb{E}$.

Hausaufgabe 7.3 Bestimmen Sie die Singularitäten der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z - \frac{1}{2})\cos(\pi z)}.$$

Besitzt f in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ eine Stammfunktion?