Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Sommersemester 2021

Analysis 4

8. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 8.1 Zeigen Sie, dass für alle nicht ganzen komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

gilt.

Präsenzaufgabe 8.2 Man zeige für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ die Relation

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^{-2n-1} \in \mathbb{Q}\pi^{2n+1}.$$

Präsenzaufgabe 8.3 Zeigen Sie, dass für jede holomorphe Funktion f ohne Nullstellen mit wegweise einfach zusammenhängenden Definitionsbereich und jedes $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ eine holomorphe Funktion g mit demselben Definitionsbereich und $g^n = f$ existiert.

Hausaufgabe 8.1 Für komplexe $x, y \in \mathbb{C}$ mit positivem Realteil definiert man die Euler'sche Betafunktion als das Integral

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Man zeige die Identität

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Hausaufgabe 8.2 Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und es gelte die Ungleichung

$$|f(z)| < \exp(|z|^\lambda)$$

für $|z| >> 0$. (Man sagt, dass derartige Funktionen von endlicher Ordnung sind. Das Infimum aller derartiger λ's wird Ordnung von f genannt.) Sei $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ die Potenzreihenentwicklung von f in der Null. Man zeige

$$|a_n| \leq \left(\frac{e\lambda}{n}\right)^{n/\lambda}$$

für alle natürlichen Zahlen $n >> 0$. Betrachten Sie die Funktionen $\exp(z^k)$, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, um zu prüfen, ob die obige Schranke die Bestmögliche Schranke ist.