Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel Sommersemester 2021

Analysis 4

9. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 9.1 Ist $\{u_n\}$ eine Folge komplexer Zahlen, sodass

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} (1+u_1)(1+u_2)...(1+u_n)$$

existiert, so schreiben wir

$$p = \prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Sind $u_1, \dots, u_N$ komlexe Zahlen und

$$p_N = \prod_{n=1}^{N}(1+u_n) \qquad p_N^* = \prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|),$$

   dann gilt

$$p_N^* \leq \exp(|u_1| + \cdots + |u_n|)$$

   und

$$|p_N - 1| \leq p_N^* - 1.$$

2. Sei $\{u_n\}$ eine Folge beschränkter komplexwertiger Funktionen auf einer Menge $S \subset \mathbb{C}$, sodass $\sum_n |u_n|$ gleichmäßig auf S konvergiert. Dann konvergiert das Produkt

$$f(s) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(s))$$

   gleichmäßig auf S und $f(s)$ ist genau dann Null, wenn $u_n(s) = -1$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Desweiteren gilt für jede Permutation $\{n_1, n_2, \dots\}$ von $\{1, 2, \dots\}$ ebenfalls

$$f(s) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+u_{n_k}(s)).$$

3. Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ für $n \in \mathbb{N}$, sodass f_n auf keiner Komponente von Ω identisch verschwindet und sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$$

   gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω konvergiert. Dann konvergiert auch das Produkt

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

   gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω, also gilt insbesondere $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Zudem gilt

$$m(f;z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n;z) \qquad (z \in \Omega),$$

wobei $m(f;z)$ bzw. $m(f_n;z)$ die Multiplizität der Nullstelle von f bzw. f_n bei $z \in \Omega$ bezeichnet.

Präsenzaufgabe 9.2 Es sei $E_0(z) := 1 - z$ und

$$E_p(z) := (1-z)\exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right\},$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$, der p-te **Weierstraßsche Elementarfaktor**. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. Für $|z| \leq 1$ und $p \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}.$$

2. Sei $\{z_n\}$ eine Folge komplexer Zahlen, sodass $z_n \neq 0$ und $|z_n| \to \infty$. Ist $\{p_n\}$ eine Folge in $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty$$

für jedes $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so definiert das Produkt

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

eine ganze Funktion. P hat bei $\alpha \in \mathbb{C}$ genau dann eine Nullstelle von Vielfachheit $m \in \mathbb{N}_0$ wenn α m-mal in der Folge $\{z_n\}$ auftaucht.

Präsenzaufgabe 9.3 Sei f eine ganze Funktion mit $f(0) \neq 0$ und seien $z_1, z_2, \ldots$ die Nullstellen von f aufgelistet nach Vielfachheit. Dann gibt es eine ganze Funktion g und eine Folge $\{p_n\}$ in $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, sodass

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

Diese Aussage ist auch als **Weierstraßscher Faktorisierungssatz** bekannt.

Hausaufgabe 9.1 Man zeige

$$\frac{d^2}{dz^2}\log\Gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^2}$$

für $z \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Hinweis: Produktentwicklung der Γ-Funktion.

Hausaufgabe 9.2 Man zeige die Legendre'sche Verdopplungsformel

$$\Gamma(2z) = \Gamma(z)\Gamma(z+(1/2))2^{2z-1}/\sqrt{\pi}.$$

Hinweis: Wenden sie $\frac{d^2}{dz^2}$ mit Hilfe von H.9.1 auf $\Gamma(z)\Gamma(z+(1/2))/\Gamma(2z)$ an.

Hausaufgabe 9.3 Jede meromorphe Funktion auf einer offenen Menge Ω ist ein Quotient von zwei auf Ω holomorphen Funktionen.