Aufgabe 1

Aus den Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen folgt, dass die Ableitung von $f_{\mathbb{R}}$ im Punkt $p \in U$ geschrieben werden kann als

$$df_{\mathbb{R}}(p) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

wobei $a = \frac{\partial}{\partial x} u$ und $b = \frac{\partial}{\partial x} v$. Die Funktionaldeterminante von $f_{\mathbb{R}}$ im Punkt p wird dann gegeben durch

$$\det df_{\mathbb{R}}(p) = \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$$

Da $df_{\mathbb{R}} \neq 0$ gilt $a \neq 0 \vee b \neq 0$ und damit

$$a^2 + b^2 > 0 \Rightarrow \det df_{\mathbb{R}}(p) > 0$$

Für die dritte Bedingung seien $\gamma_1, \gamma_2 : I \to U$ zwei stetig differenzierbare Kurven mit Anfangspunkt p. Seien $\gamma_1'(0) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \gamma_2'(0) = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{\langle df_{\mathbb{R}}(p)\gamma_1'(0), df_{\mathbb{R}}(p)\gamma_2'(0)\rangle}{||df_{\mathbb{R}}(p)\gamma_1'(0)||\,||df_{\mathbb{R}}(p)\gamma_2'(0)||} &= \frac{\langle \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}\rangle}{\left|\left|\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right|\right|\left|\left|\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}\right|\right|} \\
&= \frac{\langle \begin{pmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ae - bf \\ be + af \end{pmatrix}\rangle}{\left|\left|\begin{pmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{pmatrix}\right|\right|\left|\left|\begin{pmatrix} ae - bf \\ be + af \end{pmatrix}\right|\right|}
\end{aligned}$$

Für beliebige $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \begin{pmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ae - bf \\ be + af \end{pmatrix}\rangle =& \langle \begin{pmatrix} ac \\ bc \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -bd \\ ad \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ae \\ be \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bf \\ af \end{pmatrix}\rangle \\
=& \langle \begin{pmatrix} ac \\ bc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ae \\ be \end{pmatrix}\rangle + \langle \begin{pmatrix} ac \\ bc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -bf \\ af \end{pmatrix}\rangle \\
&+ \langle \begin{pmatrix} -bd \\ ad \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ae \\ be \end{pmatrix}\rangle + \langle \begin{pmatrix} -bd \\ ad \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -bf \\ af \end{pmatrix}\rangle \\
=& ce\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\rangle + cf\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\rangle \\
&+ de\langle \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\rangle + df\langle \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\rangle \\
=& ce\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\rangle + df\langle \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\rangle \\
=& \left|\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|\right|^2 \cdot (ce + df) \\
=& \left|\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|\right|^2 \cdot \langle \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}\rangle
\end{aligned}$$

Dann gilt für $c = e$ und $d = f$ aus obigen Argument

$$\left|\left|\begin{pmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{pmatrix}\right|\right| = \sqrt{\langle\begin{pmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{pmatrix}\rangle}$$
$$= \sqrt{\left|\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|\right|^2 \cdot \langle\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\rangle}$$
$$= \left|\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|\right| \cdot \left|\left|\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right|\right|$$

Damit ist

$$\frac{\langle\begin{pmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ae - bf \\ be + af \end{pmatrix}\rangle}{\left|\left|\begin{pmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{pmatrix}\right|\right| \left|\left|\begin{pmatrix} ae - bf \\ be + af \end{pmatrix}\right|\right|} = \frac{\left|\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|\right|^2 \cdot \langle\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}\rangle}{\left|\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|\right| \left|\left|\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right|\right| \left|\left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right|\right| \left|\left|\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}\right|\right|}$$
$$= \frac{\langle\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}\rangle}{\left|\left|\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right|\right| \left|\left|\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}\right|\right|}$$
$$= \frac{\langle\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)\rangle}{||\gamma_1'(0)|| \, ||\gamma_2'(0)||}$$

Bearbeitung von Übungsblatt 1

David Frederick Bergmann

23. April 2021

Aufgabe 1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $g \colon U \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Wir nennen g konform, falls für alle $p \in U$

1. $\mathrm{d}g(p) \neq 0$
2. $\det \mathrm{d}g(p) > 0$
3. für jedes Paar von C^1-Kurven $\gamma_i \colon I \to U$ mit $\gamma_i(0) = p$, auf einem offenen Interval $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ gilt

$$\frac{\langle \gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \rangle}{\|\gamma_1'(0)\| \, \|\gamma_2'(0)\|} = \frac{\langle \mathrm{d}g(p)\gamma_1'(0), \mathrm{d}g(p)\gamma_2'(0) \rangle}{\|\mathrm{d}g(p)\gamma_1'(0)\| \, \|\mathrm{d}g(p)\gamma_2'(0)\|}. \tag{1}$$

Sei $\psi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x + \mathrm{i}y$, U ein Gebiet und $f \colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie, dass $f_{\mathbb{R}} = \psi^{-1} \circ f \circ \psi \colon \psi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^2$ konform ist.

Antwort. … □

Aufgabe 2.

1. Skizzieren Sie die Menge

$$F = \{\, z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq \tfrac{1}{2}, \operatorname{Im} z > 0, |z| \geq 1 \,\} \subseteq \mathbb{C}. \tag{2}$$

2. Sei $\mathbb{H} \coloneqq \{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Zeigen Sie, dass $\phi \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}, z \mapsto -\frac{1}{z}$ biholomorph ist.
3. Bestimmen und skizzieren Sie $\phi(F) \subsetneqq \mathbb{H}$.

Antwort. Die Skizze der Menge ist Abbildung 1. Sei $z \in \mathbb{H}$ beliebig. Es gilt natürlich $z \neq 0$. Damit existiert die Ableitung

$$\mathrm{d}\phi(z) = \lim_{h \to 0} \frac{-(z+h)^{-1} + z^{-1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{z + h - z}{z(z+h)h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{z^2 + zh} = \frac{1}{z^2} \tag{3}$$

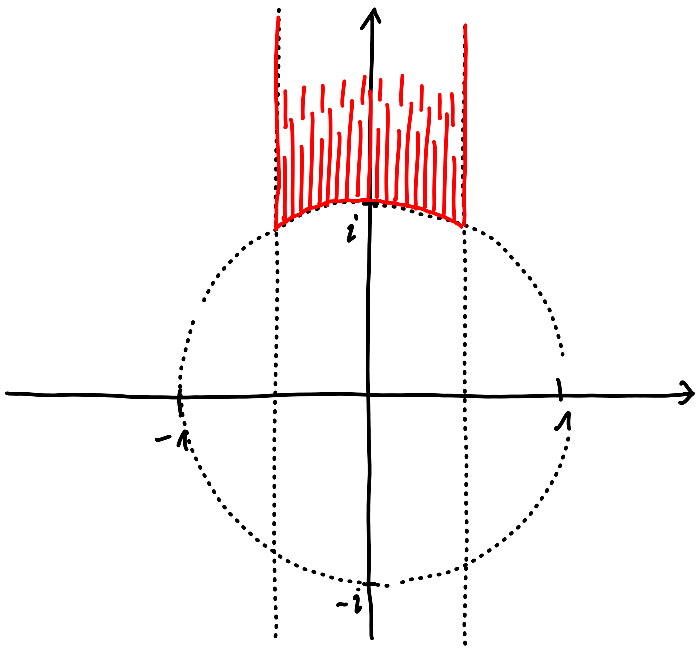

Abbildung 1: Die Skizze zu der Menge F aus Aufgabe 2.

und da ϕ selbstinvers ist, erhalten wir bereits die Biholomorphie. Ein Punkt liegt nun also genau dann in $\phi(F)$, wenn sein Urbild schon in F lag. Sei also $z = \varrho \exp(\mathrm{i}\vartheta) \in \mathbb{H}$ mit $\varrho > 0$ und $0 < \vartheta < \pi$. Wir sehen $|\phi(z)| = |z|^{-1}$ und weiterhin

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{Re}\phi(z)| &= |\operatorname{Re}(-\frac{1}{\varrho}\exp(-\mathrm{i}\vartheta))| && (4)\\
&= \frac{1}{2\varrho}|\exp(-\mathrm{i}\vartheta) + \exp(\mathrm{i}\vartheta)| && (5)\\
&= \frac{1}{2\varrho^2}|\varrho\exp(\mathrm{i}\vartheta) + \varrho\exp(-\mathrm{i}\vartheta)| && (6)\\
&= \frac{1}{|z|^2}|\operatorname{Re} z|. && (7)
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\phi(F) &= \{\, \phi(z) : z \in \mathbb{H}, |\operatorname{Re} z| \leq \tfrac{1}{2}, |z| \geq 1 \,\} && (8)\\
&= \{\, \phi(\phi(z)) : \phi(z) \in \mathbb{H}, |\operatorname{Re}\phi(z)| \leq \tfrac{1}{2}, |\phi(z)| \geq 1 \,\} && (9)\\
&= \{\, z \in \mathbb{H} : |\operatorname{Re} z| \leq \tfrac{1}{2}|z|^2, |z| \leq 1 \,\} && (10)
\end{aligned}
$$

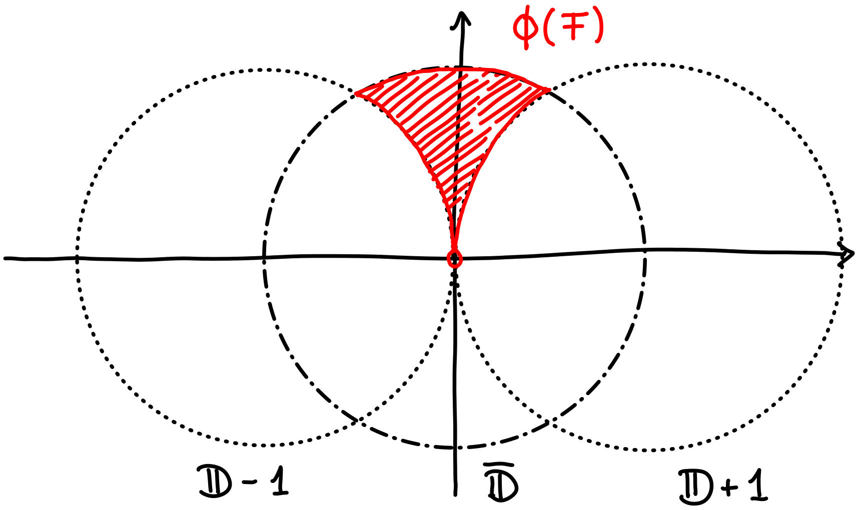

Abbildung 2: Die Skizze zu der Menge $\phi(F)$ aus Aufgabe 2.

und die Bedingung $|\operatorname{Re} z| \; le \frac{1}{2}|z|^2$ lässt sich mit $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Re} z| \leq \tfrac{1}{2}|z|^2 &\iff 2|x| \leq x^2 + y^2 && (11)\\
&\iff (x^2 - 2|x| + 1) + y^2 = (|x| - 1)^2 + y^2 \geq 1 && (12)\\
&\iff (x \pm 1)^2 + y^2 = |z \pm 1|^2 \geq 1 && (13)\\
&\iff z \notin (\mathbb{D} - 1) \cup (\mathbb{D} + 1). && (14)
\end{aligned}$$

Als finale Notation der Menge erhalten wir

$$\phi(F) = (\overline{\mathbb{D}} \cap \mathbb{H}) \setminus \big((\mathbb{D} - 1) \cup (\mathbb{D} + 1)\big) \tag{15}$$

und für die Skizze Abbildung 2 $\square$

2. Übungsblatt
Adrian Redder

Hausaufgabe 2.1

Zeigen Sie, dass keine stetige Funktion $w : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ mit $w(z)^2 = z$ geben kann.

Beweis. Angenommen es gäbe w wie beschrieben. Aus $w(z^2)^2 = z^2$ folgt dann $w(z^2) = \pm z$.
Sei nun

$$\varepsilon(z) : \mathbb{C}^\times \to \{-1, 1\}, z \mapsto \frac{w(z^2)}{z}.$$

Dann ist $\varepsilon(z)$ eine stetige Surjektion, da $w((-z)^2) = w(z^2) = \pm z$. Aufgrund der Surjektivität sind die Urbilder der einpunktigen Mengen nicht leer und aufgrund der Stetigkeit sind diese sowohl offen als auch abgeschlossen, da $\{-1\}$ und $\{1\}$ in der von $\mathbb{C}^\times$ induzierten Teilraumtopologie auf $\{-1, 1\}$ (der diskreten Topologie) sowohl offen als auch abgeschlossen sind.
Dies liefert eine disjunkte Zerlegung in offene Mengen:

$$\mathbb{C}^\times = \varepsilon^{-1}(\{-1\}) \sqcup \varepsilon^{-1}(\{1\})$$

Jedoch ist $\mathbb{C}^\times$ zusammenhängend. Ein Widerspruch. $\square$

Aufgabe 2.2
Partialbruchzerlegung

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1+x^4} = \frac{A}{x^2+\mathrm{i}} + \frac{B}{x^2-\mathrm{i}} \\
\Rightarrow &A(x^2-\mathrm{i}) + B(x^2+\mathrm{i}) = 1 \\
\Rightarrow &A = \frac{\mathrm{i}}{2} \wedge B = -\frac{\mathrm{i}}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \int \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x \\
\overset{\text{Partialbruchzerlegung}}{=} & \int \frac{\frac{\mathrm{i}}{2}}{x^2+\mathrm{i}} - \frac{\frac{\mathrm{i}}{2}}{x^2-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x \\
= & \int \frac{\frac{1}{2}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi 3/4}x)^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi 1/4}x)^2+1}\,\mathrm{d}x \\
= & \int \frac{\frac{1}{2}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi 3/4}x)^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\frac{1}{2}}{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi 1/4}x)^2+1}\,\mathrm{d}x \\
\overset{\text{Transformationssatz}}{=} & \int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi 3/4}}{2}\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u + \int \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi 1/4}}{2}\frac{1}{v^2+1}\,\mathrm{d}v & u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi 3/4}x \\
& & v = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi 1/4}x \\
= & \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi 3/4}}{2}\arctan(u) + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi 1/4}}{2}\arctan(v) + C & C \in \mathbb{R} \\
\overset{\text{Rücksubstitution}}{=} & \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi 3/4}}{2}\arctan(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi 3/4}x) + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi 1/4}}{2}\arctan(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi 1/4}x) + C & C \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

3.3 v)

Sei $\gamma \in \Omega(X, x_0)$ beliebig.

$$f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$$
$$g_*([\gamma]) = [g \circ \gamma]$$
$$\text{Sei } \tilde{H} \colon I \times I \to Y, (s,t) \mapsto H(\gamma(s), t)$$

$\tilde{H}$ ist als Komposition von stetigen Funktionen wieder stetig.

$$\forall s \in I \colon \tilde{H}(s,0) = H(\gamma(s),0) = f(\gamma(s)) = f \circ \gamma(s)$$
$$\forall s \in I \colon \tilde{H}(s,1) = H(\gamma(s),1) = g(\gamma(s)) = g \circ \gamma(s)$$

$$\forall t \in I \colon \tilde{H}(0,t) = H(x_0,t) = y_0 = H(x_0,t) = \tilde{H}(1,t)$$

$$\Rightarrow f \circ \gamma \sim g \circ \gamma$$
$$\Rightarrow [f \circ \gamma] = [g \circ \gamma]$$

$\Rightarrow f_* = g_*$

vi)

Aus sternförmig folgt einfach zusammenhängend. Somit ist jede geschlossene Kurve homotop zur Kurve in einem Punkt. Somit gilt $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$

vii)

Sei $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{S}^1, z \mapsto \frac{z}{|z|}$. f ist als Kombination stetiger Funktionen wieder stetig. Nach (vi) ist f_* ein Gruppenhomomorphismus von $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$ nach $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$. f_* ist surjektiv, denn $\forall \gamma \in \Omega(\mathbb{S}^1, 1) \colon f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma] = [\gamma]$. Da f_* ein Gruppenhomomorphismus ist, reicht es für die Injektivität zu zeigen, dass $f_*([\gamma]) = [1_{\Omega(\mathbb{S}^1,1)}] \Rightarrow [\gamma] = [1_{\Omega(\mathbb{C}^\times,1)}]$

$$f_*([\gamma]) = [1_{\Omega(\mathbb{S}^1,1)}] \Rightarrow f \circ \gamma \sim 1_{\Omega(\mathbb{S}^1,1)}$$
$$\Rightarrow \exists \text{ Homotopie } H \text{ zwischen } f \circ \gamma \text{ und } 1_{\Omega(\mathbb{S}^1,1)}$$
$$\text{Sei } \tilde{H} \colon I \times I \to C^\times, (s,t) \mapsto H(s,t) \cdot |\gamma(s)|$$

$\tilde{H}$ ist als Produkt von stetigen Funktionen wieder stetig.

$$\tilde{H}(s,0) = H(s,0)|\gamma(s)| = f(\gamma(s))|\gamma(s)| = \gamma(s)$$
$$k(s) \coloneqq \tilde{H}(s,1) = H(s,1)|\gamma(s)| = 1 \cdot |\gamma(s)| \in \Omega(\mathbb{R}^+, 1)$$
$$\tilde{H}(0,t) = H(0,t)|\gamma(0)| = 1 = H(0,t)|\gamma(0)| = \tilde{H}(1,t)$$
$$\Rightarrow \gamma \sim k \sim 1_{\Omega(\mathbb{C}^\times,1)} \text{ nach vi), da } \mathbb{R}^+ \text{ sternförmig}$$
$$\Rightarrow [\gamma] = [1_{\Omega(\mathbb{C}^\times,1)}]$$

Somit ist f_* injektiv und damit auch bijektiv. Insgesamt folgt $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$

5. Übungsblatt

Christoph Heinrichs

Aufgabe 5.2

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $p \in U$ und $f : U \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer wesentlichen Singularität bei p. Wir nehmen zusätzlich an, dass f injektiv ist. Sicherlich finden wir ein $\epsilon > 0$, sodass $B_\epsilon(p) \subseteq U$. Nun ist

$$T := B_\epsilon(p) \setminus \overline{B_{\frac{\epsilon}{2}}(p)}$$

ein Gebiet in U. Da f nicht konstant ist, sehen wir mithilfe des Satzes über die Gebietstreue, dass $f(T)$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist. Insbesondere ist $f(T)$ offen in $\mathbb{C}$. Nun folgt aus $B_{\frac{\epsilon}{2}}(p) \cap T = \emptyset$ bereits $f(B_{\frac{\epsilon}{2}}(p)) \cap f(T) = \emptyset$, da f injektiv ist. Wegen des Satzes von Casorati-Weierstraß muss $f(B_{\frac{\epsilon}{2}}(p))$ dicht in $\mathbb{C}$ liegen. Insbesondere müssen alle offenen Kreisscheiben um einen beliebigen Punkt $z \in f(T)$ bereits ein Element aus $f(B_{\frac{\epsilon}{2}}(p))$ enthalten. Damit kann $f(T)$ keine offene Kreisscheibe enthalten. Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass $f(T)$ offen in $\mathbb{C}$ ist, also kann f nicht injektiv gewesen sein.

Aufgabe 5.3

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe und injektive Funktion. Wir betrachten die auf $\mathbb{C}^\times$ definierte Funktion $\overline{f} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(\frac{1}{z})$. Nun ist $\overline{f}$ wieder holomorph und injektiv, da es eine Komposition von Funktionen ist, die jeweils holomorph und injektiv sind. Dank Aufgabe 5.2 wissen wir, dass $\overline{f}$ bei 0 keine wesentliche Singularität haben kann. Damit gibt es also ein $n \in \mathbb{N}_0$, sodass $\overline{f}(z)z^n = g(z)$, $z \neq 0$ mit einer holomorphen Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ersetzen wir z durch $\frac{1}{z}$, so sehen wir:

$$f(z) = \overline{f}(\frac{1}{z}) = g(1/z)z^n.$$

Also ist

$$\frac{f(z)}{z^n} = g(\frac{1}{z}),$$

was wegen der Stetigkeit von g sicherlich für $|z| > 1$ beschränkt ist. Damit ist f nach Hausaufgabe 4.2 ein Polynom vom Grad $\leq n$ und wegen der Injektivität[1] von f folgt $\mathrm{grad}(f) = 1$, was zu zeigen war.

[1]Der Fall $\mathrm{grad}(f) < 1$ ist offensichtlich ausgeschlossen. Falls $\mathrm{grad}(f) > 1$, so kann f keine verschiedenen Nullstellen haben, da es sonst nicht injektiv wäre. Also gilt $f(z) = (p - z)^m$ mit $m = \mathrm{grad}(f)$. Dann gilt aber $f(p - e^{\frac{2\pi ik}{m}}) = e^{2\pi ik} = 1$ für $1 \leq k \leq m$, was ebenfalls im Widerspruch zur Injektivität von f steht.

6.1

a) f hat in 0 eine Singularität

$$\frac{1-cos(z)}{z^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-3}}{(2n)!} + \frac{1}{z^3}$$

$$\operatorname{Res}_0 f \overset{n=1}{=} \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

b) f hat eine Polstelle 3. Ordnung in -1

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{-1} f &= \lim_{z\to -1}\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial^2 z}(z+1)^3\cdot\frac{z^2}{(z+1)^3}\\ &= \lim_{z\to -1}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 z}z^2\\ &= \lim_{z\to -1}\frac{1}{2}2\\ &= 1\end{aligned}$$

c) f hat eine Polstelle 3. Ordnung an den Stellen i und $-\mathrm{i}$

$$f(x) = \frac{1}{(z+i)^3\cdot(z-i)^3}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{i} f &= \lim_{z\to i}\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial^2 z}(z-i)^3\frac{1}{(z+i)^3\cdot(z-i)^3}\\ &= \lim_{z\to i}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 z}\frac{1}{(z+i)^3}\\ &= \lim_{z\to i}\frac{1}{2}\cdot 12\frac{1}{(z+i)^5}\\ &= \frac{12}{2\cdot 32i}\\ &= \frac{-3i}{16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{-i} f &= \lim_{z\to -i}\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial^2 z}(z+i)^3\frac{1}{(z+i)^3\cdot(z-i)^3}\\ &= \lim_{z\to -i}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial^2 z}\frac{1}{(z-i)^3}\\ &= \lim_{z\to -i}\frac{1}{2}\cdot 12\frac{1}{(z-i)^5}\\ &= \frac{12}{2\cdot(-32i)}\\ &= \frac{3i}{16}\end{aligned}$$

d) f hat in 1 eine Singularität. Die Taylorentwicklung der Exponentialfunktion in 1 ist

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(z-1)^n \\
\frac{e^z}{(z-1)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(z-1)^n}{n!(z-1)^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(z-1)^{n-2} \\
\operatorname{Res}_1 f &\overset{n=1}{=} e
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
f(z) &= (z-1+1)e^{\frac{1}{z-1}} = (z-1)e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-1}} \\
&= (z-1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z-1)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z-1)^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z-1)^{-n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z-1)^{-n} \\
Res_1 f &= \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

6.3

$$\begin{aligned}
f(x) &\coloneqq \frac{x}{1+x^2}\mathrm{e}^{ix} \\
&= \frac{x}{(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})}\mathrm{e}^{ix}
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f Polestellen erster Ordnung bei i und $-\mathrm{i}$ hat. Somit ist Präsenzaufgabe 6.1 anwendbar. Es reicht die Residuen in der oberen Halbebene zu betrachten, also das Residuum von f an der Stelle i. Mithilfe der Rechenregeln für Residuen gilt

$$\operatorname{Res}_{\mathrm{i}} f = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} \cdot \operatorname{Res}_i \frac{1}{x-\mathrm{i}} = \frac{1}{2e}$$

Damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1}{2e} = \frac{\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}}$$

7.1

Folgt sofort aus Präsenzaufgabe 4.3, da f kein dichtes Bild hat.

7.2

$$\begin{aligned} &f(z) = e^z + 3z^5 \\ &|3z^5| = 3 > e \geq |e^{\mathrm{Re}(z)}| = |e^z| \quad \forall |z| = 1 \end{aligned}$$

$3z^5$ hat 5 Nullstellen mit Vielfachheiten in $\mathbb{E}$. Deshalb hat f nach dem Satz von Rouché auch 5 Nullstellen mit Vielfachheiten in $\mathbb{E}$.

7.3

Sei $S := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$. S ist einfach zusammenhängend.

$$f(z) = \frac{1}{(z - \frac{1}{2}) \cos(\pi z)}$$

$\cos$ hat Nullstelen erster Ordnung an den Punkten $(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})\pi$. f hat damit an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ eine Polstelle 2. Ordnung und ansonsten nur Polstellen 1. Ordnung. $\frac{\pi}{2}$ ist die einzige Singularität in S.

Nach dem Satz von Morera gilt, dass f eine Stammfunktion hat, wenn für jede geschlossene Kurve γ in S gilt

$$\int_\gamma f = 0$$

Sei γ eine Schleife in S. Nach den Residuensatz reicht es zu zeigen, dass das Residuum von f an der Stelle $z = \frac{1}{2}$ gleich 0 ist, da somit jedes Kurvenintegral $\int_\gamma f$ verschwindet.

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{\frac{1}{2}} f &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} (z - \frac{1}{2})^2 f(z) \\ &= \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} \frac{z - \frac{1}{2}}{\cos(\pi z)} \\ &= \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{\cos(\pi z) + \pi(z - \frac{1}{2}) \sin(\pi z)}{(\cos(\pi z))^2} \\ &\overset{\text{„}\frac{0}{0}\text{"}}{=} \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{-\sin(\pi z)\pi + \pi \sin(\pi z) + \pi^2 (z - \frac{1}{2}) \cos(\pi z)}{-2\pi \cos(\pi z) \sin(\pi z)} \\ &= \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{\pi(z - \frac{1}{2})}{-2 \sin(\pi z)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

f hat damit eine Stammfunktion im Gebiet S.