Universität Paderborn Sommersemester 2021
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Analysis 4

1. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 1.1 Sei $G := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass G biholomorph zu $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist. Zeigen Sie hierzu:

(i) Sei $R := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Dann ist
$$\phi : R \to G,\ z \mapsto z^2$$
biholomorph.

(ii)
$$\psi : R \to \mathbb{D},\ z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$$
ist biholomorph.

Präsenzaufgabe 1.2 Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x+iy$, $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig partiell differenzierbar in den Koordinaten x und y. Es sei zudem
$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
und
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$
Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen:

(i) f ist holomorph $\iff$ $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = 0$ $\iff$ $\frac{\partial}{\partial x} f = -i\frac{\partial}{\partial y} f$

(ii) $\overline{f}$ ist holomorph $\iff$ $\frac{\partial}{\partial z} f = 0$ $\iff$ $\frac{\partial}{\partial x} f = i\frac{\partial}{\partial y} f$.

Sei $\Delta := \partial_x^2 + \partial_y^2$, $V \subset \mathbb{R}^2$ offen und $g : V \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Wir nennen g harmonisch, falls $\Delta g = 0$. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ harmonisch sind.

Hausaufgabe 1.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $g : U \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Wir nennen g konform, falls

(i) $dg(p) \neq 0 \ \forall p \in U$

(ii) $\det(dg(p)) > 0 \ \forall p \in U$

(iii) für jedes $p \in U$ und für jedes Paar von stetig differenzierbaren Kurven $\gamma_i : I \to U$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ ist, gilt

$$\frac{\langle \gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \rangle}{\|\gamma_1'(0)\| \|\gamma_2'(0)\|} = \frac{\langle dg(p)\gamma_1'(0), dg(p)\gamma_2'(0) \rangle}{\|dg(p)\gamma_1'(0)\| \|dg(p)\gamma_2'(0)\|}.$$

Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x + iy$, U ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und stetig partiell differenzierbar. Zeigen Sie, dass $f_{\mathbb{R}} = \psi^{-1} \circ f \circ \psi : \psi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^2$ konform ist.

Hausaufgabe 1.2

(i) Skizzieren Sie die Menge

$$F = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2},\ \mathrm{Im}(z) > 0,\ |z| \geq 1\} \subset \mathbb{C}.$$

(ii) Sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Zeigen Sie, dass $\phi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, z \mapsto -\frac{1}{z}$ biholomorph ist.

(iii) Bestimmen und skizzieren Sie $\phi(F) \subset \mathbb{H}$.