Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2021/2022

Funktionalanalysis

1. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 1.1 Sei $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(a) Zeigen Sie, dass E ein topologischer Vektorraum mit der Produkttopologie ist.

(b) Zeigen Sie, dass E nicht normierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass E ein Fréchet-Raum ist.

Präsenzaufgabe 1.2 Sei E ein topologischer Vektorraum und $A, B \subset E$ Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) Sind A und B kompakt, so ist auch $A + B$ kompakt.

(b) Ist A kompakt und B abgeschlossen, so ist auch $A + B$ abgeschlossen.

Hausaufgabe 1.1 Die konvexe Hülle von einer Menge A in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum X ist die Menge aller Konvexkombinationen von Elementen in A, d.h. die Menge aller Summen der Form

$$t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n,$$

wobei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $x_i \in A$, $t_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.
Zeigen Sie, dass die konvexe Hülle einer Menge $A \subset V$ konvex ist und sie genau der Schnitt aller konvexen Mengen in V ist, welche A enthalten.

Hausaufgabe 1.2 Sei $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^N = 1$ und $\alpha^2 \neq 1$ und V ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Zeigen Sie, dass

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \|x + \alpha^n y\|^2 \alpha^n$$

für alle $x, y \in V$ gilt.

Hausaufgabe 1.3 Sei E ein topologischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Summe $A + B$ zweier abgeschlossener Mengen $A, B \subset E$ nicht notwendigerweise abgeschlossen ist.