Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2021/2022

Funktionalanalysis

10. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 10.1 Besprechung der Hausaufgaben

Sei H ein separabler $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $B(H)$ die Menge der beschränkten linearen Operatoren auf H.

Präsenzaufgabe 10.2

(a) $A \in B(H)$ und $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB von H. Zeigen Sie, dass der Wert

$$\|T\|_2^2 := \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \in [0, \infty) \cup \{\infty\} \tag{1}$$

nicht von e abhängt.

$A \in B(H)$ wird Hilbert-Schmidt genannt, falls $\|A\|_2^2 < \infty$ gilt. Die Menge der Hilbert-Schmidt Operatoren wird mit $B_2(H)$ bezeichnet und $\|A\|_2$ wird Hilbert-Schmidt-Norm von A genannt.

(b) Sei $A \in B(H)$. Zeigen Sie: $\|A\| \leq \|A\|_2$ und im Fall von $A \in B_2(H)$, dass A kompakt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $B_2(H)$ ein Unterraum von $B(H)$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass $B_2(H)$ ein beidseitiges Ideal in $B(H)$ ist.

(e) Zeigen Sie, dass die sesquilinear Form

$$\langle A, B\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ae_n, Be_n\rangle \qquad (A, B \in B_2(H))$$

unabhängig von der Wahl der ONB $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist und $B_2(H)$ zu einem Hilbertraum macht.

(f) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung

$$H \otimes H' \to B_2(H), (v, \lambda) \mapsto [w \mapsto \alpha(w)v]$$

zu einem isometrischen Isomorphismus zwischen $H\hat{\otimes}H'$ und $B_2(H)$ fortgesetzt werden kann. Hier bezeichnet $H\hat{\otimes}H'$ die Vervollständigung des Prähilbertraums $H \otimes H'$.

(g) Sei $(X, d\mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$T : L^2(X \times X, d\mu \otimes d\mu) \to B_2(L^2(X, d\mu)), k \mapsto T_k,$$

wobei $T_k(f)$ für $f \in L^2(X, d\mu)$ gegeben ist durch

$$T_k(f)(x) = \int_X k(x, y) f(y) dy$$

für μ fast alle $x \in X$, ein isometrischer Isomorphismus ist.