Universität Paderborn Wintersemester 2021/2022
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Funktionalanalysis

11. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 11.1 Sei $(X, d\mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$T : L^2(X \times X, d\mu \otimes d\mu) \to B_2(L^2(X, d\mu)), k \mapsto T_k,$$

wobei $T_k(f)$ für $f \in L^2(X, d\mu)$ gegeben ist durch

$$T_k(f)(x) = \int_X k(x,y)f(y)dy$$

für μ fast alle $x \in X$, ein isometrischer Isomorphismus ist.

Präsenzaufgabe 11.2 Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli.

Präsenzaufgabe 11.3 Besprechung der Grundlagen von Spurklasseoperatoren.

Hausaufgabe 11.1 Sei S ein kompakter metrischer Raum und μ ein endliches Borel-Maß auf S und $K \in C(S \times S)$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Arzelà-Ascoli, dass der Integral Operator

$$T_K : C(S) \to C(S),$$

wobei

$$T_K(f)(x) = \int_S K(x,y)f(y)d\mu(y) \qquad (x \in S)$$

ein wohldefinierter kompakter Operator ist.

Hausaufgabe 11.2 Sei

$$K(s,t) = \begin{cases} |s-t|^{-\alpha} & \text{falls } s \neq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $(s,t) \in [0,1]^2$. Zeigen Sie, dass der Integraloperator

$$T_K : C([0,1]) \to C([0,1]),$$

wobei

$$T_K(f)(x) = \int_S K(x,y)f(y)d\mu(y) \qquad (x \in S)$$

ein wohldefinierter kompakter Operator ist.

Hausaufgabe 11.3 Zeigen Sie, dass die Inklusion $C^1([0,1]) \hookrightarrow C([0,1])$ ein kompakter Operator ist.

Hausaufgabe 11.4 Sei H ein komplexer Hilbertraum. Zeigen Sie, dass die Inklusionen

$$\mathcal{FR}(H) \subset B_1(H) \subset B_2(H) \subset \mathcal{K}(H) \subset B(H)$$

im Allgemeinen echte Inklusionen sind. (Hier bezeichnet $\mathcal{FR}(H)$ die Operatoren von endlichen Rang auf H und $\mathcal{K}(H)$ die kompakten Operatoren auf H.