Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2021/2022

Funktionalanalysis

2. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 2.1 Sei $p \in \mathbb{R}$ mit $0 < p < 1$ und $\mathcal{L}^p([0,1])$ die Menge aller messbaren, reell oder komplexwertigen Funktionen f auf $[0,1]$ mit

$$\Delta(f) = \int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty.$$

(a) Zeigen Sie, dass
$$\Delta(f+g) \leq \Delta(f) + \Delta(g)$$
für alle $f, g \in \mathcal{L}^p([0,1])$ gilt und folgern Sie daraus, dass $\mathcal{L}^p([0,1])$ ein Vektorraum ist.

(b) Sei U der Unterraum $\Delta^{-1}(\{0\})$ und $L^p([0,1]) := \mathcal{L}^p([0,1])/U$. Nach (a) faktorisiert Δ zu einer Abbildung auf $L^p([0,1])$ gegegen durch die Vorschrift
$$\Delta([f]) = \Delta(f)$$
für $f \in \mathcal{L}^p([0,1])$. Für $[f], [g] \in L^p([0,1])$ sei
$$d([f],[g]) = \Delta(f-g).$$
Zeigen Sie, dass d eine invariante Metrik auf $L^p([0,1])$ ist und zeigen Sie, dass $L^p([0,1])$ mit dieser Metrik zu einem topologischen Vektorraum wird.

(c) Zeigen Sie, dass d vollständig und somit $L^p([0,1])$ ein F-Raum ist.

(d) Zeigen Sie, dass $L^p([0,1])$ lokal beschränkt ist.

(e) Zeigen Sie, dass die einzigen offenen konvexen Mengen in $L^p([0,1])$ die leere Menge und $L^p([0,1])$ selbst sind und somit $L^p([0,1])$ nicht lokal konvex ist.

(f) Zeigen Sie, dass jede stetige lineare Abbildung $\Lambda : L^p([0,1]) \to E$ in einen lokal konvexen Vektorraum E die Nullabbildung ist. Insbesondere folgt damit, dass $L^p([0,1])$ keine nicht-trivialen stetigen Funktioniale besitzt für $0 < p < 1$.

Hausaufgabe 2.1 Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ nicht leer und offen. Zeigen Sie, dass nicht leere kompakte Mengen $K_1, K_2, K_3, \ldots$ in Ω existieren, sodass $K_n \subset K_{n+1}^o$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ gilt. Eine derartige Folge von Kompakta wird ausschöpfende Folge von Ω genannt.

Hausaufgabe 2.2 Sei Ω wie in Hausaufgabe 2.1, $C(\Omega)$ der komplexe Vektorraum aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf Ω und $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Ω ausschöpfende Folge von Kompaktas. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Seminorm

$$p_n(f) = \sup_{x \in K_n} |f(x)| \qquad (f \in C(\Omega).$$

(a) Zeigen Sie, dass $C(\Omega)$ mit der von den Seminormen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugten Topologie ein Fréchet-Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass die in (a) genannte Topologie nicht von der ausschöpfenden Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abhängt.

(c) Zeigen Sie, dass $C(\Omega)$ nicht lokal beschränkt und damit auch nicht normierbar ist.

Hausaufgabe 2.3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nicht leer und offen und $C(\Omega)$ wie in Hausaufgabe 2.2. Sei $H(\Omega)$ der Unterraum von $C(\Omega)$ aller holomorphen Funktionen auf Ω.

(a) Zeigen Sie, dass $H(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $C(\Omega)$ und damit selbst ein Fréchet-Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass $H(\Omega)$ die Heine-Borel Eigenschaft besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass $H(\Omega)$ nicht lokal beschränkt und damit auch nicht normierbar ist.