Universität Paderborn Wintersemester 2021/2022
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Funktionalanalysis

5. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 5.1 Sei G eine topologische Gruppe und E ein topologischer Vektorraum. G operiere stetig und linear auf E, d.h. es existiert eine stetige Abbildung

$$\mu : G \times E \to E$$

sodass $\mu(e, v) = v$, $\mu(g_1 g_2, v) = \mu(g_1, \mu(g_2.v))$ für alle $v \in E$, $g_1, g_2 \in G$ und sodass $\mu(g, \cdot) : E \to E, v \mapsto \mu(g, v)$ linear ist für jedes $g \in G$. Es bezeichne

$$\mathrm{GL}(E) = \{T : E \to E : T \text{ linear, bijektiv, stetig, } T^{-1} \text{ stetig}\}.$$

Zeigen Sie:

(i)
$$\pi : G \to \mathrm{GL}(E), g \mapsto \pi(g),$$
wobei $\pi(g)(v) := \mu(g, v)$ für $v \in E$, ist ein Gruppenhomomorphismus.

(ii) $f_v : G \to E, g \mapsto \pi(g)v$ ist stetig für jedes $v \in E$.

Sei nun G zusätzlich lokal kompakt und E ein F-Raum. Angenommen $\pi : G \to \mathrm{GL}(E)$ ist ein Gruppenhomomorphismus, sodass (ii) gilt. Zeigen Sie, dass dann

$$\mu_\pi : G \times E \to E, (g, v) \to \pi(g)v$$

eine stetige lineare Operation von G auf E definiert.

Eine stetige lineare Wirkung von G auf E wird auch Darstellung von G (auf E) genannt.

Präsenzaufgabe 5.2 Sei $G = (\mathbb{R}, +)$ und $E = L^p(\mathbb{R})$ für $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass $\pi(x)(f)(y) := f(y - x)$ ($f \in L^p(\mathbb{R}), x, y \in \mathbb{R}$) eine Darstellung von $(\mathbb{R}, +)$ definiert. Zeigen Sie, dass die analoge Vorschrift im Fall $p = \infty$ keine Darstellung von $(\mathbb{R}, +)$ definiert.

Hausaufgabe 5.1 [Rudin] Kapitel 2 Aufgabe 14,15,16