Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Jannik Michel

Wintersemester 2021/2022

Funktionalanalysis

8. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 8.1 Es sei H ein Hilbertraum und $B(H)$ die Menge der beschränkten linearen Operatoren auf H. Zeigen Sie

(i) Zu jedem A in $B(H)$ existiert genau ein Operator $A^* \in B(H)$, sodass

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \qquad \forall\, x, y \in H.$$

Zudem gilt $(A^*)^* = A$, $\|A^*\| = \|A\|$ und $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

(b) Ist $A : H \to H$ linear mit $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle\ \forall\, x, y \in H$ dann ist A stetig.

Präsenzaufgabe 8.2 Sei nun H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $A \in B(H)$. Zeigen Sie:

(i) $A = A^* \iff \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}\ \forall x \in H$.

(ii) $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, y\rangle| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$

(iii) Ist $A = A^*$ so gilt $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| \leq 1\}$.

Präsenzaufgabe 8.3 Sei $A \in B(H)$ mit $A^*A = AA^*$. Zeigen Sie

(i) $\|A^*x\| = \|Ax\|$ für alle $x \in H$.

(ii) Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ und existiert ein $c > 0$ sodass $\|(\lambda \mathrm{Id} - A)x\| \geq c\|x\|$ für alle $x \in H$ gilt, dann ist $\lambda\mathrm{Id} - A$ invertierbar und beschränkt.

Hausaufgabe 8.1 [Rudin] Kapitel 3 Aufgabe 17, 20, 21