

# Funktionalanalysis

## 9. Übungsblatt

Sei  $H$  ein  $\mathbb{C}$ -Hilbertraum.

**Präsenzaufgabe 9.1** Ist  $A \in B(H)$  invertierbar und positiv, so existiert  $\ln(A)$  nach dem Funktionalkalkül und erfüllt  $\exp(\ln(A)) = A$ . Zeigen Sie: Ist  $B \in B(H)$  selbstadjungiert und erfüllt ebenfalls  $\exp(B) = A$ , so gilt bereits  $B = \ln(A)$ .

**Präsenzaufgabe 9.2** Zeigen Sie: Ist  $A = A^* \in B(H)$  und  $f \in C(\sigma(A), \mathbb{C})$  so gilt

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)).$$

$U \in B(H)$  heißt partielle Isometrie, falls ein abgeschlossener Unterraum  $M \leq H$  existiert, sodass

$$\|Ux\| = \|x\| \quad \forall x \in M$$

und

$$U(M^\perp) = 0$$

gilt.

**Präsenzaufgabe 9.3** Sei  $A \in B(H)$ . Zeigen Sie, dass eine partielle Isometrie  $U \in B(H)$  existiert, sodass

$$A = U\sqrt{A^*A}.$$

Zeigen Sie außerdem: Ist  $A$  invertierbar, so ist  $U$  unitär.

**Hausaufgabe 9.1** [Rudin] Kapitel 10 A.12 (S.272), Kapitel 12 A.18,19 (S.343).