Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

1. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 1.1 Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots, \lambda$ beliebige Zahlen. Welche der folgenden Identitäten sind richtig, welche sind falsch? Begründen Sie!

(a) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i b_j$,

(b) $\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_i b_j = \prod_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i b_j$,

(c) $\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$,

(d) $\prod_{j=1}^{m} \lambda b_j = \lambda \prod_{j=1}^{m} b_j$,

Präsenzaufgabe 1.2 Sei n eine natürliche Zahl. Man zeige durch vollständige Induktion:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

Präsenzaufgabe 1.3 Sei n eine natürliche Zahl. Wie viele Tripel (a_1, a_2, a_3) natürlicher Zahlen gibt es, die $a_1 + a_2 + a_3 = n$ erfüllen?

Präsenzaufgabe 1.4 Seien A, B, C Mengen. Man zeige:

(a) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,

(b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

(c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

(d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Präsenzaufgabe 1.5 (*Aus Soergels Skript*) Sind X und Y endliche Mengen, so gilt für die Kardinalitäten $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$ und $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.

Hausaufgabe 1.1 Mit $x_0 := 0$, $x_1 := 1$ definieren wir rekursiv für alle $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} := 4x_n - 3x_{n-1}$. Man zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Hausaufgabe 1.2 Man beweise durch vollständige Induktion: Für ganze Zahlen m, n mit $0 \leq m \leq n$ gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Hausaufgabe 1.3 Seien A, B und C Teilmengen einer Menge X. Man nennt

$$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

die symmetrische Differenz von A und B. Man zeige:

(a) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$;

(b) $A \Delta B = A \Delta C \Longleftrightarrow B = C$.

Hausaufgabe 1.4 Bestimmen Sie die Potenzmenge folgender Mengen:

(a) $\emptyset$,

(b) $\{1, \alpha\}$,

(c) $\{1, \{1\}, \{1, 1\}\}$.

Hausaufgabe 1.5 Beweisen Sie den folgenden Satz (*Lemma 1.5 in Müllers Skript*). Seien A und B Mengen und $a, x \in A$, $b, y \in B$. Es gilt

$$(a, b) = (x, y) \quad \Longleftrightarrow \quad (a = x \wedge b = y).$$

Hausaufgabe 1.6 Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion: Für eine n-elementige Menge X gilt $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 18.10.2019, 10 Uhr in den roten Postfächern Nr. 115 & 116 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.