Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

1. Übungsblatt – Ausgewählte Lösungen

Präsenzaufgabe 1.2 Sei n eine natürliche Zahl. Man zeige durch vollständige Induktion:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Beweis: Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Falls für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

Beweis: Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Falls für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^3 + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2.$$

Präsenzaufgabe 1.3 Sei n eine natürliche Zahl. Wie viele Tripel (a_1, a_2, a_3) natürlicher Zahlen gibt es, die $a_1 + a_2 + a_3 = n$ erfüllen?

Lösung: Für $n \geq 3$ ist die Antwort $\binom{n-1}{2}$.
Beweis durch vollständige Induktion: Für $n = 3$ ist die einzige Möglichkeit $3 = 1 + 1 + 1$, also ist die Antwort $1 = \binom{2}{2}$. Nehme an, dass es für ein $n \in \mathbb{N}$ genau $\binom{n-1}{2}$ Tripel gibt, die $a_1 + a_2 + a_3 = n$ erfüllen. Es gibt n Tripel der Form $(1, a_2, a_3)$, die $1 + a_2 + a_3 = n + 1$ erfüllen. Alle andere Tripel (a_1, a_2, a_3) die $a_1+a_2+a_3 = n+1$ erfüllen, haben die Eigenschaft, dass $a_1 > 1$. Wenn es m Tripel dieser Form gibt, dann gibt es auch genau m Tripel (b_1, b_2, b_3), die $b_1+b_2+b_3 = n$ erfüllen: mann kann 1 von a_1 abziehen. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt $m = \binom{n-1}{2}$. Insgesamt gibt es darum $(n-1) + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{2}$ Tripel (a_1, a_2, a_3), die $1 + a_2 + a_3 = n + 1$ erfüllen.

Hausaufgabe 1.1 Mit $x_0 := 0$, $x_1 := 1$ definieren wir rekursiv für alle $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} := 4x_n - 3x_{n-1}$. Man zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Beweis durch vollständige Induktion: Es gilt

$$x_0 = 0 = \frac{3^0 - 1}{2}$$

und

$$x_1 = 1 = \frac{3^1 - 1}{2},$$

also ist die Behauptung wahr für $n = 0$ und $n = 1$. Falls $x_i = \frac{3^i-1}{2}$ für alle $i \leq n$ mit $n \in \mathbb{N}$, folgt

$$x_{n+1} = 4x_n - 3x_{n-1} = 4\frac{3^n - 1}{2} - 3\frac{3^{n-1} - 1}{2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Hausaufgabe 1.2 Man beweise durch vollständige Induktion: Für ganze Zahlen m, n mit $0 \leq m \leq n$ gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Beweis: Sei $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \geq 0$ fest gegeben. Für $n = m$ gilt

$$\sum_{k=m}^{m} \binom{k}{m} = \binom{m}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1}.$$

Also ist die Behauptung richtig für $n = m$. Falls die Behauptung für n richtig ist, folgt

$$\sum_{k=m}^{n+1} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m} + \binom{n+1}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Hausaufgabe 1.3 Seien A, B und C Teilmengen einer Menge X. Man nennt

$$A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

die symmetrische Differenz von A und B. Man zeige:

(a) $(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$;
Beweis: Sei $x \in (A\Delta B) \cap C$. Dann ist $x \in C$ und $x \in A\Delta B$. Weiter ist (nach Definition von $A\Delta B$) $x \in A$ oder $x \in B$, nicht aber im Durchschnitt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürven wir annehmen, dass $x \in A$. Dann ist aber $x \notin B$, also $x \in A \cap C$ und $x \notin B \cap C$. Dies beweist, dass $(A\Delta B) \cap C \subseteq (A \cap C)\Delta(B \cap C)$.

Sei nun $x \in (A\cap C)\Delta(B\cap C)$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürven wir annehmen, dass $x \in A \cap C$. Dann $x \notin B \cap C$ und damit auch $x \notin B$.

(b) $A\Delta B = A\Delta C \iff B = C$.
Beweis: "$\Longleftarrow$" ist trivial. Statt "$\Longrightarrow$" zeigen wir die äquivalente Aussage: $B \neq C \Longrightarrow A\Delta B \neq A\Delta C$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürven wir annehmen, dass es ein $c \in C \setminus B$ gebe. Fallunterscheidung:

(1) $c \in A$. Dann ist $c \notin A\Delta C$, aber $c \in A\Delta B$.

(2) $c \notin A$. Dann ist $c \in A\Delta C$, aber $c \notin A\Delta B$.

Hausaufgabe 1.6 Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion: Für eine n-elementige Menge X gilt $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

Beweis durch vollstädige Induktion: Falls $|X| = 0$, dann $X = \emptyset$ und $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ enthält genau 1 Element. Die Aussage ist darum wahr, wenn $n = 0$. Nehme an, dass $n \in \mathbb{N}_0$ und die Potenzmenge einer Menge mit n Elementen genau 2^n Elementen enthält. Nehme an, dass $|X| = n + 1$. Sei $x_0 \in X$. Dann

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X) &= \{A \in \mathcal{P}(X) : x_0 \notin A\} \cup \{A \in \mathcal{P}(X) : x_0 \in A\} \\ &= \mathcal{P}\big(X \setminus \{x_0\}\big) \cup \big\{A \cup \{x_0\} : A \in \mathcal{P}\big(X \setminus \{x_0\}\big)\big\}\end{aligned}$$

und darum $|\mathcal{P}(X)| = 2|\mathcal{P}\big(X \setminus \{x_0\}\big)|$. Da $|X \setminus \{x_0\}| = n$, gilt nach der Induktionsvoraussetzung $|\mathcal{P}\big(X \setminus \{x_0\}\big)| = 2^n$ und damit $|\mathcal{P}(X)| = 2^{n+1}$.