Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

2. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 2.1 Konstruieren Sie eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

Präsenzaufgabe 2.2 Sei X eine Menge. Man ermittle eine Injektion $f : X \to \mathcal{P}(X)$ und eine Surjektion $g : \mathcal{P}(X) \to X$.

Präsenzaufgabe 2.3 Beweisen Sie den folgenden Satz (*Satz 1.3.26 in Soergels Skript Mengen und Verknüpfungen*).
Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.

(i) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv;

(ii) Sind g und f injektiv, so auch $g \circ f$;

(iii) Genau dann ist g injektiv, wenn für beliebige Abbildungen $f_1, f_2 : X \to Y$ aus $g \circ f_1 = g \circ f_2$ schon folgt $f_1 = f_2$.

Hinweis: Zeige erst die letzte Aussage und folgere dann die vorderen Aussagen ohne weitere Betrachtung von Elementen.

Präsenzaufgabe 2.4 Es sei X eine beliebige Menge und $\mathrm{Abb}(X, \{0,1\})$ die Menge aller Abbildungen von X nach $\{0,1\}$. Bestimmen Sie eine Bijektion $\mathcal{P}(X) \to \mathrm{Abb}(X, \{0,1\})$.

Präsenzaufgabe 2.5 Welche der folgenden Verknüpfungen sind kommutativ/assoziativ?

(a) $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^y$,

(b) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x + y)^2$,

(c) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 3 + xy$.

Präsenzaufgabe 2.6 (*Aus Soergels Skript*) Sei Z eine Menge. Das Schneiden von Teilmengen ist eine Verknüpfung

$$\cap : \mathcal{P}(Z) \times \mathcal{P}(Z) \to \mathcal{P}(Z), \quad (A, B) \mapsto A \cap B$$

auf der Potenzmenge. Dasselbe gilt für die Vereinigung und das Bilden der Differenzmenge. Welche dieser Verknüpfungen sind kommutativ oder assoziativ? Welche besitzen neutrale Elemente?

Hausaufgabe 2.1 Gegeben seien die Mengen $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $N = \{\alpha, a, A\}$. Bestimmen Sie

(a) eine injektive Abbildung $f : N \to M$,

(b) eine surjektive Abbildung $g : M \to N$,

(c) eine bijektive Abbildung $h : N \to N$,

(d) eine Abbildung $i : M \to M$, die weder injektiv noch surjektiv ist.

Hausaufgabe 2.2 Beweisen Sie den folgenden Satz (*Satz 1.3.28 in Soergels Skript Mengen und Verknüpfungen*).
Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.

(i) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv;

(ii) Sind g und f surjektiv, so auch $g \circ f$;

(iii) Genau dann ist f surjektiv, wenn für beliebige Abbildungen $g_1, g_2 : Y \to Z$ aus $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ schon folgt $g_1 = g_2$.

Hinweis: Zeige erst die letzte Aussage und folgere dann die vorderen Aussagen ohne weitere Betrachtung von Elementen.

Hausaufgabe 2.3 Sei X eine beliebige Menge. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : X \to \mathcal{P}(X)$ niemals surjektiv ist. Hinweis: Betrachten Sie die Menge $Y := \{x \in X : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$.

Hausaufgabe 2.4 Sei X eine endliche Menge. Beweisen Sie, dass es genau $2^{|X|}$ Abbildungen von X nach $\{0, 1\}$ gibt.

Hausaufgabe 2.5 (*Aus Soergels Skript*) Beweisen Sie den folgenden Satz. Seien X, Y endliche Mengen. So gibt es genau $|Y|^{|X|}$ Abbildungen von X nach Y, und unter diesen Abbildungen sind genau $|Y|(|Y|-1)(|Y|-2)...(|Y|-|X|+1)$ Injektionen.

Hausaufgabe 2.6 Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Menge $F_n = \{1, 2, ..., n\}$ gegeben. Ferner bezeichne $\mathrm{Bij}(F_n)$ die Menge aller bijektiven Abbildungen von F_n in sich selbst. Zeigen Sie:

$$|\mathrm{Bij}(F_n)| = n!$$

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 25.10.2019, 10 Uhr in den roten Postfächern Nr. 115 & 116 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.