Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

3. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 3.1 Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$.

(a) Seien c_i reelle Zahlen mit $0 \leq c_i \leq b-1$. Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} c_i b^i \leq b^{n+1} - 1.$$

(b) Zeigen Sie, dass jede Zahl $x \in \mathbb{N}$ einde eindeutige Darstellung der Form

$$x = \sum_{i=0}^{n} c_i b^i$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $c_i \in \{0, ..., b-1\}$ besitzt.

Präsenzaufgabe 3.2 Gegeben seien die (Dezimal-)Zahlen $x = 7$ und $y = 47$.

(a) Stellen Sie x und y im Binärsystem dar.

(b) Stellen Sie x und y im Hexadezimalsystem (bestehend aus den Ziffern $\{0, 1, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F\}$) dar.

Präsenzaufgabe 3.3 Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften eines ageordneten Körpers $(K, +, \cdot, <)$:

(a) $x > 0, y < 0 \Longrightarrow xy < 0$,

(b) $x > 1 \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1$,

(c) $x_1 < y_1$, $x_2 < y_2 \Longrightarrow x_1 + x_2 < y_1 + y_2$,

(Hierbei sind x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 jeweils Elemente aus K.)

Präsenzaufgabe 3.4 Sei K ein angeordneter Körper und $a, b, c, d \in K$ mit $b > 0$ und $d > 0$. Man zeige:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Präsenzaufgabe 3.5 Sei K ein Körper. Die Abbildung $K^\times \to K^\times$; $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist eine Bijektion. Was ist die Umkehrabbildung?

Hausaufgabe 3.1

(a) Stellen Sie die Dualzahl 1100101 im Dezimal- und Hexadezimalsystem dar.

(b) Stellen Sie die folgende Dualzahl im Hexadezimalsystem dar:

1111.1111.1111.1111.1111.1111.1111.1111.1111.1111.1111.1111.1111.

Hausaufgabe 3.2

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1.$$

(b) Folgern Sie, dass jede Zahl $x \in \mathbb{N}$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot i!$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \{0, 1, ..., i\}$ besitzt.

Hausaufgabe 3.3 (Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel) Zeigen Sie: Für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n \geq \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Hinweis: Benütze vollständige Induktion. Für die Induktionsschritt kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_{n+1} \geq x_i$ für $i = 1, \ldots n$. Zeige mit Hilfe der Bernoullische Ungleichung

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} x_i}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x_{n+1} - x_a}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} \geq \frac{x_{n+1}}{x_a},$$

wobei x_a das aritmetisch Mittel $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ist. Zeige dann, dass

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^{n+1} \geq \prod_{i=1}^{n+1} x_i.$$

Hausaufgabe 3.4 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) Zeigen Sie:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hinweis: Definiere für $i = 1, \ldots, n$

$$X_i := \frac{|x_i|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}} \quad \text{und} \quad Y_i := \frac{|y_i|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}}$$

Zeige mit Hilfe der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{X_i^2 Y_i^2} \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 + Y_i^2) = 1.$$

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 1.11.2019, 10 Uhr in den blauen Postfächern Nr. 115 & 116 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.