Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

5. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 5.1 Es seien

$$P(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j, \quad Q(x) = \sum_{i=0}^{l} b_i x^i$$

reelle Polynome vom Grad k bzw. l, das heißt: $a_k \neq 0$ und $b_l \neq 0$. Zeige

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \infty, & k > l, \frac{a_k}{b_l} > 0; \\ -\infty, & k > l, \frac{a_k}{b_l} < 0; \\ \frac{a_k}{b_l}, & k = l; \\ 0, & k < l. \end{cases}$$

Präsenzaufgabe 5.2 Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit

$$a_n = \frac{1}{n^2}\left(8n^2 + 1 - \frac{5n^3 + 3n^2 + n + 1}{n(2n-1)}\right),$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Präsenzaufgabe 5.3 Sind die folgende Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) Die Summe zweier beschränkter Folgen in $\mathbb{R}$ ist konvergent.

(b) Ist die Summe zweier Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergent, dann konvergieren auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst.

(c) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, dann ist die Folge $((-1)^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(d) Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen a, so ist $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Präsenzaufgabe 5.4 Sei $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n - c$. Wir schreiben f' für die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto nx^{n-1}$. Sei $x_0 = 1$ and definiere für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}.$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen von f und die Abbildung

$$t_0 : x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

(b) Zeigen Sie, dass x_1 die einzige Nullstelle von t_0 ist.

(c) Geben Sie eine Beschreibung von x_k. Malen Sie Bilder!

(d) Zeigen Sie, dass $x_k^n \geq c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. (*Hinweis:* Die Bernoulli Ungleichung könnte hilfreich sein.)

(e) Zeigen Sie, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

(f) Zeigen Sie, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und $\lim_{k\to\infty} = \sqrt[n]{c}$.

Hausaufgabe 5.1 Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit

$$a_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right),$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.
Hinweis: Die Identität $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ könnte von Vorteil sein.

Hausaufgabe 5.2 Die *Fibonacci-Folge* (f_n) ist rekursiv definiert durch $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_{n+1} := f_n + f_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

(b) Zeige, dass die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$ konvergiert. Zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Hausaufgabe 5.3 Sei (f_n) die Fibonacci-Folge. Für $n \in \mathbb{N}$, sei

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{2^k}.$$

Man zeige:

(a) Es gilt $s_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 2$,

(c) $\sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\} = 2$.

Hausaufgabe 5.4 Sei $m \in \mathbb{Z}$. Definiere die Relation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ durch

$$x \sim y \iff m | x - y.$$

Sei $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ die Menge von Äquivalenzklassen von $\sim$, dass heißt

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[x] : x \in \mathbb{Z}\} = \{[0], [1], [2], \ldots, [m-1]\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ genau dann ein Körper ist, wenn m eine Primzahl ist.