Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

6. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 6.1 Für $k \in \mathbb{N}$, sei $a_k \in \mathbb{R}$. Nehme an, dass $\sup\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ und $\inf\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ existieren. Definiere

$$s_n := \sup\{a_k : k \geq n\},$$
$$i_n := \inf\{a_k : k \geq n\}.$$

(a) Zeige, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und die Folge $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist.

(b) Zeige, dass die Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Wir schreiben s und i für die Limes.

(c) Sei $\mathcal{H}$ die Menge von Häufungspunkten von $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Zeige

$$\sup \mathcal{H} = s \quad \text{und} \quad \inf \mathcal{H} = i.$$

Präsenzaufgabe 6.2

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Beweisen Sie, dass die Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$G_n := \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$$

der geometrischen Mittel gegen a konvergiert.

(b) Beweisen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} n \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = e.$$

Hinweis: Wähle $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Zeigen Sie, dass

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

Man darf benutzen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Präsenzaufgabe 6.3 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $c \in \mathbb{R}$, $0 \leq c < 1$. Es gelte $|a_{n+2} - a_{n+1}| = c|a_{n+1} - a_n|$ für alle $n \in N$. Man zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, also konvergiert. Ferner ermittle man eine divergente Folge mit $|a_{n+2} - a_{n+1}| < |a_{n+1} - a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Präsenzaufgabe 6.4 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $p \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine konvergente Nullfolge ist, wenn $(a_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Nullfolge ist.

Präsenzaufgabe 6.5 Man überprüfe die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{n}}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(2^{-n}+3^{-n})$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+17}{n^3+2n^2+n+1}$,

Hausaufgabe 6.1 Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch keine Primzahl p mit $p \neq 3$ und $p \neq 7$ teilbar sind. Zeigen Sie, dass gilt

$$\sum_{n\in\Omega} \frac{1}{n} = \frac{7}{4}.$$

Hausaufgabe 6.2 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Nehme an, dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergent ist. Zeige, dass $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.
Hinweis: Zeige, dass $na_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$.

Hausaufgabe 6.3 Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Reihen mit positiven Summanden. Man zeige: Gibt es $K, L \in \mathbb{R}$, $0 < K < L$, mit $K < \frac{a_n}{b_n} < L$ für alle n, so gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent} \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ ist konvergent.}$$

Hausaufgabe 6.4 Für $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, versteht man unter einem b-adischen Bruch eine Reihe der Gestalt

$$\pm \sum_{n=-\infty}^{k} a_n b^n.$$

Hierbei ist $k \geq 0$ und die a_n sind ganze Zahlen mit $0 \leq a_n < b$. Schreibweise: $a_k a_{k-1} \dots a_0.a_{-1}a_{-2}\dots$.

(a) Man zeige: Jeder b-adische Bruch stellt eine Cauchy-Folge dar, konvergiert also gegen eine reelle Zahl.

(b) Man zeige: Jede reelle Zahl läßt sich in einen b-adischen Bruch entwickeln, das heißt zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es für jede $n \in \mathbb{Z}_{\leq k}$ ein $a_n \in \{0, \dots, b-1\}$ mit $x = \sum_{n=-\infty}^{k} a_n b^n$.

(c) Man entwickle $x = \frac{1}{7}$ in einen b-adischen Bruch für $b = 2, 10, 16$. Bemerkung: Für $b = 16$ (hexadezimal) verwendet man die Ziffern $0, 1, \dots, 9, A, B, C, D, E, F$.

Hausaufgabe 6.5 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge. Zeigen Sie den *Verdichtungssatz von Cauchy*: Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ konvergent ist.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 22.11.2019, 10 Uhr in den blauen Postfächern Nr. 115 & 116 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.