Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

7. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 7.1 Bestimmen Sie jeweils für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alle Häufungswerte und geben Sie, soweit vorhanden, den Limes superior und den Limes inferior an.

(a) $a_n = n$,

(b) $a_n = 2(-1)^n + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$,

(c) $a_n = \frac{3^n+(-2)^n}{4^{n+1}+(-3)^n}$.

Präsenzaufgabe 7.2 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty}(-a_n)$.

(b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent genau dann, wenn $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Präsenzaufgabe 7.3 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{3^k}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2^{-k}}{k^2-3k-1}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=52}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)^k$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k(\sqrt[k]{3}-1)$,

(e) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \prod_{n=1}^{k} \frac{2n}{3n+2}$.

Präsenzaufgabe 7.4 Für $s \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, sei $B_s(z)$ die Binomialreihe

$$B_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k,$$

wobei $\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-k+1)}{k!}$. Zeigen Sie, dass $B_s(x) > 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

Hausaufgabe 7.1 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 2^k}{(2k)!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k)^k}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)$.

Hausaufgabe 7.2 Sei I eine Menge und $(a_i)_{i \in I}$ eine Familie reeller Zahlen. Dann heisst die Familie summierbar, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ und für jede $\epsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $E \subseteq I$ gibt, sodass für jede endliche Teilmenge $F \subseteq I$ mit $E \subseteq F$ gilt

$$\Big| a - \sum_{i \in F} a_i \Big| < \epsilon.$$

In diesem Fall sagt man, dass $(a_i)_{i \in I}$ summierbar ist; man schreibt $\sum_{i \in I} a_i = a$. Zeigen Sie:

(a) Ist $(a_i)_{i \in I}$ summierbar, so ist $I_0 := \{i \in I : a_i \neq 0\}$ abzählbar. *Hinweis:* Sonst gäbe es ein $n \geq 1$ derart, dass für unendlich viele $i \in I$ gälte $|a_i| > \frac{1}{n}$.

(b) Sei $I = \mathbb{N}$. Dann ist $(a_i)_{i \in I}$ summierbar, genau dann wenn $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ absolut konvergent ist.

Hausaufgabe 7.3 Die Riemannsche ζ-Funktion ist für $s > 1$ definiert durch $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

(a) Zeigen Sie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \big(\zeta(k) - 1\big) = 1.$$

(b) Es sei $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $p_k < p_{k+1}$, die Folge der Primzahlen und J_N die Menge der natürlichen Zahlen, deren Primfaktoren zu $\{p_1, \ldots, p_N\}$ gehören. Zeigen Sie: Für jedes rationale $s > 0$ ist die Familie $\left(\frac{1}{n^s}\right)_{n \in J_N}$ summierbar und hat die Summe

$$\sum_{n \in J_N} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} =: P_N.$$

(c) Im Falle $s > 1$ folgeren Sie die Eulersche Produktdarstellung der Riemannsche ζ-Funktion:

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} := \lim_{n \to \infty} P_N.$$

Hausaufgabe 7.4 Es sei $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller positiver monoton wachsender Zahlen. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1 \right)$$

konvergiert.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 29.11.2019, 10 Uhr in den blauen Postfächern Nr. 115 & 116 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.