

# Analysis 1

## 7. Übungsblatt – Ausgewählte Lösungen

**Präsenzaufgabe 7.2** Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Es gilt  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n)$ .

*Lösung:*

(a) Wenn  $a$  ein Häufungspunkt von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist, so ist  $-a$  ein Häufungspunkt von  $(-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Denn für jede  $\epsilon > 0$  und jede  $N \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > N$  und  $|a - a_n| < \epsilon$  und damit  $|-a - (-a_n)| = |a - a_n| < \epsilon$ . Sei  $\mathcal{H}$  die Menge der Häufungspunkte von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann ist  $-\mathcal{H}$  die Menge der Häufungspunkte von  $(-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Wenn  $a$  das kleinste Element in  $\mathcal{H}$  ist, dann ist  $-a$  das größte Element in  $-\mathcal{H}$ .

**Präsenzaufgabe 7.4** Für  $s \in \mathbb{C}$  und  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$ , sei  $B_s(z)$  die Binomialreihe  $B_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k$ , wobei  $\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-k+1)}{k!}$ . Zeigen Sie, dass  $B_s(x) > 0$  für alle  $s \in \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1$ .

*Lösung:* Für alle  $s, t \in \mathbb{C}$  und  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  gilt  $B_s(z)B_t(z) = B_{s+t}(z)$  und  $B_0(z) = 1$ . Insbesondere gilt  $B_s(z)B_{-s}(z) = 1$ . Es folgt, dass  $B_s(z) \neq 0$ . Wenn  $s \in \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}$ , dann sieht man an die Potenzreihe von  $B_{\frac{s}{2}}(x)$ , dass  $B_s(x) \in \mathbb{R}$ . Weiter gilt, dass  $B_s(x) = B_{\frac{s}{2}}(x)^2$ . Es folgt, dass  $B_s(x) \geq 0$ . Weil  $B_s(x) \neq 0$ , gilt  $B_s(x) > 0$ .

**Hausaufgabe 7.1** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 2^k}{(2k)!}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2k)^k}, \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1).$$

*Lösung:*

(a) Es gilt  $\frac{((k+1)!)^2 2^{k+1}}{(2(k+1))!} \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^k} = \frac{(k+1)^2 2}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{k+1}{2k+1}$ . Weil  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{2k+1} = \frac{1}{2}$ , ist die Reihe nach dem Quotientenkriterium konvergent.

(b) Nach dem Bernoullische Ungleichung gilt  $\frac{(2k+2)!}{(2k+2)^{k+1}} \frac{(2k)^k}{(2k)!} = (2k+1) \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \geq (2k+1) \left(1 - k \frac{1}{k+1}\right) = \frac{2k+1}{k+1}$ . Weil  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+1}{k+1} = 2$ , ist die Reihe nach dem Quotientenkriterium divergent.

(c) Für  $k \geq 2$  gilt  $(1 + \frac{1}{2k})^k - 1 = \sum_{n=1}^k \binom{k}{n} (2k)^{-n} = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n!} 2^{-n} \frac{k}{k} \frac{k-1}{k} \dots \frac{k-n+1}{k}$ . Jedes Glied in diese Summe ist kleiner oder gleich an  $\frac{1}{2}$ . Es folgt, dass  $(1 + \frac{1}{2k})^k \leq \frac{k}{2} + 1 \leq k$  und damit  $\frac{1}{2k} \leq \sqrt[k]{k} - 1$ . Nach dem Minorantenkriterium ist die Reihe divergent.

**Hausaufgabe 7.2** Sei  $I$  eine Menge und  $(a_i)_{i \in I}$  eine Familie reeller Zahlen. Dann heisst die Familie summierbar, wenn es ein  $a \in \mathbb{R}$  und für jede  $\epsilon > 0$  eine endliche Teilmenge  $E \subseteq I$  gibt, sodass für jede endliche Teilmenge  $F \subseteq I$  mit  $E \subseteq F$  gilt

$$\left| a - \sum_{i \in F} a_i \right| < \epsilon.$$

In diesem Fall sagt man, dass  $(a_i)_{i \in I}$  summierbar ist; man schreibt  $\sum_{i \in I} a_i = a$ . Zeigen Sie:

- (a) Ist  $(a_i)_{i \in I}$  summierbar, so ist  $I_0 := \{i \in I : a_i \neq 0\}$  abzählbar.
- (b) Sei  $I = \mathbb{N}$ . Dann ist  $(a_i)_{i \in I}$  summierbar, genau dann wenn  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  absolut konvergent ist.

*Lösung:*

- (a) Nehme an, dass  $(a_i)_{i \in I}$  summierbar ist. Es gibt eine endliche Teilmenge  $E$  von  $I$ , sodass für jede endliche Teilmenge  $F$  von  $I$  mit  $E \subseteq F$  gilt  $\left| a - \sum_{i \in F} a_i \right| < \frac{1}{2}$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $I_{\pm, n} := \{i \in I : \pm a_i > \frac{1}{n}\}$ . Für jede endliche Menge  $F$  von  $I_{+, n}$  gilt

$$a + \frac{1}{2} \geq \sum_{i \in F \cup E} a_i = \left( \sum_{i \in E} a_i \right) + \left( \sum_{j \in F \setminus E} a_j \right) \geq a - \frac{1}{2} + \frac{|F \setminus E|}{n}$$

Weil dies gilt für alle endliche Teilmengen  $F$  von  $I_{+, n}$ , folgt, dass  $|I_{+, n} \setminus E|$  endlich ist und damit, weil  $E$  endlich ist, dass  $I_{+, n}$  endlich ist. Auf ähnliche Weise folgt, dass  $I_{-, n}$  endlich ist. Es gibt darum für jede  $n \in \mathbb{N}$  nur endlich viele  $i \in I$  mit  $|a_i| > \frac{1}{n}$ . Man kann jetzt einfach eine Bijektion  $\phi : I_0 \rightarrow \mathbb{N}$  hinschreiben mit die Eigenschaft, dass  $\phi(i) \geq \phi(j)$  wenn  $|a_i| \leq |a_j|$ . Es folgt, dass  $I_0$  abzählbar ist.

- (b) Nehme an, dass  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  absolut konvergent ist und gegen  $a \in \mathbb{R}$  konvergiert. Sei  $\epsilon > 0$ . Es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\left| a - \sum_{i=1}^n a_i \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sei  $E = \{1, \dots, n\}$ . Wenn  $F \subseteq \mathbb{N}$  endlich ist und  $E \subseteq F$ , dann

$$\left| a - \sum_{i \in F} a_i \right| = \left| a - \sum_{i \in E} a_i + \sum_{i \in F \setminus E} a_i \right| \leq \left| a - \sum_{i=1}^n a_i \right| + \sum_{i \in F \setminus E} |a_i| \leq \left| a - \sum_{i=1}^n a_i \right| + \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| < \epsilon.$$

Es folgt, dass  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  summierbar ist.

Nehme jetzt an, dass  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  summierbar ist. Sei  $\epsilon > 0$ . Es gibt eine  $a \in \mathbb{R}$  und eine endliche Teilmenge  $E$  von  $\mathbb{N}$ , sodass für alle endliche Teilmengen  $F$  von  $\mathbb{N}$  mit  $E \subseteq F$  gilt

$$\left| a - \sum_{i \in F} a_i \right| < \epsilon.$$

Sei  $N = \max(E)$ . Für alle  $n \geq N$  ist  $E$  enthalten in  $\{1, \dots, n\}$  und darum gilt

$$\left| a - \sum_{i=1}^n a_i \right| = \left| a - \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i \right| < \epsilon.$$

Dies beweist, dass die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  gegen  $a$  konvergiert. Wenn die Reihe nicht absolut konvergent wäre, gibt es nach der Satz von Riemann (Satz 5.15) eine Bijektion  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , sodass  $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\phi(i)}$  gegen  $a + 2\epsilon$  konvergiert. Sei  $N' = \max \phi^{-1}(E)$ . Für jede  $n > N'$  gilt  $E \subseteq \{\phi(i) : 1 \leq i \leq n\}$  und damit

$$\sum_{i=1}^n a_{\phi(i)} < a + \epsilon < a + 2\epsilon.$$

Dies ist ein Widerspruch. Darum ist die Reihe absolut konvergent.

**Hausaufgabe 7.3** Die Riemannsche  $\zeta$ -Funktion ist für  $s > 1$  definiert durch  $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ .

(a) Zeigen Sie  $\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = 1$ .

(b) Es sei  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $p_k < p_{k+1}$ , die Folge der Primzahlen und  $J_N$  die Menge der natürlichen Zahlen, deren Primfaktoren zu  $\{p_1, \dots, p_N\}$  gehören. Zeigen Sie: Für jedes rationale  $s > 0$  ist die Familie  $(\frac{1}{n^s})_{n \in J_N}$  summierbar und hat die Summe

$$\sum_{n \in J_N} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - p_k^{-s}} =: P_N.$$

(c) Im Falle  $s > 1$  folgern Sie die Eulersche Produktdarstellung der Riemannsche  $\zeta$ -Funktion:

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} := \lim_{n \rightarrow \infty} P_N.$$

*Lösung:*

(a) Nach dem Doppeltreihensatz gilt  $\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ . Weil

$$\left(\frac{1}{n} - 1\right) \sum_{k=2}^K \frac{1}{n^k} = \left(\sum_{k=3}^{K+1} \frac{1}{n^k}\right) - \left(\sum_{k=2}^K \frac{1}{n^k}\right) = \frac{1}{n^{K+1}} - \frac{1}{n^2},$$

gilt

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^K \frac{1}{n^k} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{n^{-K-1} - n^{-2}}{n^{-1} - 1} = \frac{-n^{-2}}{n^{-1} - 1} = \frac{n}{n-1} - \frac{n+1}{n}$$

und damit

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{n}{n-1} - \frac{n+1}{n} \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \left( \sum_{n=2}^N \frac{n}{n-1} \right) - \left( \sum_{n=3}^{N+1} \frac{n}{n-1} \right) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{N+1}{N} \right) = 1. \end{aligned}$$

(b)  $P_N$  wird gegeben durch (Geometrische Reihe)

$$P_N = \prod_{k=1}^N \frac{1}{1-p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^N \sum_{m=0}^{\infty} p_k^{-sm}. \quad (1)$$

Zu jeder endlichen Teilmenge  $J \subseteq J_N$  gibt es ein  $M \in \mathbb{N}$  mit

$$\sum_{n \in J} \frac{1}{n^s} \leq \prod_{k=1}^N \sum_{m=0}^M p_k^{-sm} < P_N.$$

Also ist die Menge der Partialsummen unserer Familie beschränkt, die Familie demnach summierbar. Ausmultiplizieren in (1) zeigt, dass jeder Summand in  $\sum_{n \in J_N} \frac{1}{n^s}$  genau einmal auftritt. Da wir nun nicht mehr auf die Reihenfolge der Aufsummierung achten müssen ist die Behauptung bewiesen.

(c) Für  $s > 1$  existiert  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n \in J_N} \frac{1}{n^s}$  und ist gleich an  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ .