Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

8. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 8.1 Für $p > 0$, sei $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Wir definieren $\|x\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

(a) Für $p \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$, sei $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben durch

$$d_p(x, y) := \|x - y\|_p \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

Zeigen Sie, dass d_1, d_2 und d_∞ Metriken auf $\mathbb{R}^n$ definieren. *Hinweis:* Für $\|\cdot\|_2$ kann man die Cauchy-Schwarsche Ungleichung verwenden.

(b) Zeigen Sie, dass $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(c) Beschreiben und skizzieren Sie die Teilmenge $\{x \in \mathbb{R}^n : d_p(x, 0) = 1\}$ von $\mathbb{R}^n$ für $p = 1, 2, \infty$.

Präsenzaufgabe 8.2 Berechnen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k^{k+1}} z^k$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 3^k z^{3k}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^{10} + k} z^k$.

Präsenzaufgabe 8.3 Geben Sie eine geometrische Beschreibung der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ an und skizzieren Sie diese:

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) = 1\}$,

(b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z^2) = 1\}$,

(c) $C = \{z \in \mathbb{C} : z^2 = 1 + i\}$.

Präsenzaufgabe 8.4 Beweisen Sie, dass es ein $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, sodass $\cos(x) = 0$.

Hausaufgabe 8.1 Für $s \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, sei $B_s(z)$ die Binomialreihe

$$B_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k,$$

wobei $\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-k+1)}{k!}$.

(a) Sei $s \in \mathbb{R}$ und sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge rationaler Zahlen, die monoton wächst und gegen s konvergiert. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} B_{s_n}(x) = B_s(x).$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $s \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$B_s(x) = (1 + x)^s.$$

(c) Berechnen Sie die erste 5 Glieder der Potenzreihe für $\sqrt{1 + x} = B_{\frac{1}{2}}(x)$.

Hausaufgabe 8.2 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty} \binom{n}{k} z^n$ für $k \in \mathbb{N}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{3k+1}\right) z^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n+3} z^n$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3 + 2 + (-1)^n}{n^3 + 3}\right)^n z^n$.

Hausaufgabe 8.3 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci-Folge, das heißt $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere die Potenzreihe $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $f(x)$.

(b) Ermitteln Sie eine explizite Darstellung der Funktion f. *Hinweis:* Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) + \alpha x f(x) + \beta x^2 f(x) = 1 + x$.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 6.12.2019, 10 Uhr in den blauen Postfächern Nr. 115 & 116 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.