Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

12. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 12.1 Berechnen sie die Ableitungen der Funktionen

(a) $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,

(b) $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$,

(c) $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

(d) $\operatorname{arsinh} = \sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(e) $\operatorname{arcosh} = \cosh^{-1} : (1, \infty) \to (0, \infty)$.

Präsenzaufgabe 12.2 Sei $F(x) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.

(a) Beweisen Sie, dass für jede $k \in \mathbb{N}$ die Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} x^n$$

gleich an R ist.

(b) Beweisen Sie, dass für jede $k \in \mathbb{N}$ die Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1) a_n x^n$$

gleich an R ist.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$. Beweisen Sie, dass F differenzierbar in x ist und

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

(d) Beweisen Sie, dass F sogar unendlich oft differenzierbar in x ist und für jede $k \in \mathbb{N}$

$$F^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1) a_{n+k} x^n.$$

Präsenzaufgabe 12.3 Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Graphen von f und zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist.

Hausaufgabe 12.1 Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $[a, b]$. Beweisen Sie den Satz von Darboux: f' nimmt auf $[a, b]$ jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an. *Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $f'(a) > f'(b)$. Betrachten Sie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - \lambda x$ mit $f'(a) > \lambda > f'(b)$. Beweisen Sie, dass g stetig ist und damit, dass g sein Maximum auf $[a, b]$ in einem Punkt $y \in [a, b]$ annimmt. Beweisen Sie, dass $y \in (a, b)$ und darum $g'(y) = 0$.*
Aus dem Satz folgt nicht, dass f' stetig ist. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

differenzierbar ist. Ist f' stetig in 0?

Hausaufgabe 12.2 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$, eine Folge gleichmäßig stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass auch f gleichmäßig stetig ist.

Hausaufgabe 12.3 Zeigen Sie für hinreichend oft differenzierbare Funktionen f, g die Leibniz-Formel:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Hausaufgabe 12.4 Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit in $x = 0$:

(i) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x}$,

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{|x|}$,

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x|x|$.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 17.1.2020, 10 Uhr in den blauen Postfächern Nr. 115 & 116 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.