Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Bernhard Krötz, Dr. Job Kuit

Wintersemester 2019–2020

Analysis 1

13. Übungsblatt – Ausgewählte Lösungen

Hausaufgabe 13.1 Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei H_n gegeben durch

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Beweisen Sie, dass $H_n(x)$ ein Polynom vom Grad n ist. Diese Polynome werden die Hermiteschen Polynome (nach Charles Hermite) genannt.

(b) Berechnen Sie H_0, H_1, H_2, H_3 und H_4.

(c) Beweisen Sie, dass die Hermiteschen Polynome eindeutig bestimmt werden durch $H_0(x) = 1$ und die Rekursionsformel

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - \frac{d}{dx}H_n(x) \qquad (n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

(d) Beweisen Sie, dass die Hermiteschen Polynome auch eindeutig bestimmt werden durch $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$ und die Rekursionsformel

$$H_{n+2}(x) = 2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x) \qquad (n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

(e) Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ das Hermitesche Polynom H_n die Differenzialgleichung

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

erfüllt.

Lösung:

(a) Wir beweisen mit vollständige Induktion, dass es für jede $n \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom p_n vom Grad n gibt, so dass $\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = p_n(x)e^{-x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $n = 0$ ist die Behauptung wahr mit $p_0 = 1$. Nehme an, dass $\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = p_n(x)e^{-x^2}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Sei p_{n+1} das Polynom gegeben durch $p_{n+1}(x) = p_n'(x) - 2xp_n(x)$. Dann ist p_{n+1} vom Grad $n+1$ und es gilt

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2} = \frac{d}{dx}\Big(p_n(x)e^{-x^2}\Big) = \Big(p_n'(x) - 2xp_n(x)\Big)e^{-x^2} = p_{n+1}(x)e^{-x^2}.$$

Dies beweist die Behauptung.

Jetzt gilt $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = (-1)^n e^{x^2} p_n(x)e^{-x^2} = (-1)^n p_n(x)$. Es folgt, dass H_n ein Polynom vom Grad n ist.

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{aligned}$$

(c) Es reicht zu zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Polynome H_n die Gleichung (1) erfüllen. Nach dem Produktregel gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}H_n(x) = (-1)^n \frac{d}{dx}\Big(e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} &= (-1)^n\Big(\frac{d}{dx}e^{x^2}\Big)\Big(\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\Big) + (-1)^n e^{x^2}\Big(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2}\Big) \\ &= (-1)^n 2xe^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} + (-1)^n e^{x^2}\Big(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2}\Big) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x). \end{aligned}$$

(d) Es reicht zu zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Polynome H_n die Gleichung (2) erfüllen. Es gilt

$$\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}e^{-x^2} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\Big(\frac{d}{dx}e^{-x^2}\Big) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\Big(-2xe^{-x^2}\Big).$$

Nach die Leibnizregel ist die Rechte Seite der Gleichung gleich

$$\begin{aligned} &-2\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\Big(\frac{d^k}{dx^k}x\Big)\Big(\frac{d^{n+1-k}}{dx^{n+1-k}}e^{-x^2}\Big) \\ &\quad= -2\binom{n+1}{0}x\Big(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2}\Big) - 2\binom{n+1}{1}\Big(\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\Big) \\ &\quad= -2x\Big(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2}\Big) - 2(n+1)\Big(\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\Big). \end{aligned}$$

Darum gilt

$$\begin{aligned} H_{n+2}(x) &= (-1)^{n+2}e^{x^2}\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}e^{-x^2} \\ &= 2(-1)^{n+1}xe^{x^2}\Big(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-x^2}\Big) - 2(-1)^n(n+1)e^{x^2}\Big(\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\Big) \\ &= 2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x). \end{aligned}$$

(e) Nach (1) gilt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}H_n(x) &= \frac{d}{dx}\Big(2xH_n(x) - H_{n+1}(x)\Big) \\ &= 2H_n(x) + 2x\frac{d}{dx}H_n(x) - \frac{d}{dx}H_{n+1}(x) \\ &= 2H_n(x) + 2x\Big(2xH_n(x) - H_{n+1}(x)\Big) - \Big(2xH_{n+1}(x) - H_{n+2}(x)\Big) \\ &= H_{n+2}(x) - 4xH_{n+1}(x) + (2+4x^2)H_n(x) \end{aligned}$$

und darum

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2}H_n(x) - 2x\frac{d}{dx}H_n(x) + 2nH_n(x)\\
&= \Big(H_{n+2}(x) - 4xH_{n+1}(x) + (2+4x^2)H_n(x)\Big) - 2x\Big(2xH_n(x) - H_{n+1}(x)\Big) + 2nH_n(x)\\
&= H_{n+2}(x) - 2xH_{n+1}(x) + 2(n+1)H_n(x).
\end{aligned}$$

Nach (2) ist die rechte Seite der Gleichung gleich 0.

Hausaufgabe 13.2 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ konvex. Beweisen Sie die diskretisierte Jensen'sche Ungleichung: Für alle $x_1, \dots, x_n \in D$ und $\lambda_i \geq 0$ reell mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Lösung: Wir beweisen die Aussage mit vollständige Induktion. Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Nehme an, dass die Aussage wahr ist für ein $n \in \mathbb{N}$. Seien $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in D$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Wenn $\lambda_{n+1} = 1$, dann $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ und damit

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

Wir nehmen jetzt an, dass $\lambda_{n+1} \neq 1$ und definieren $\mu_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}$ für $k = 1, \dots, n$. Weil f konvex ist, gilt

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left((1-\lambda_{n+1})\Big(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\Big) + \lambda_{n+1}x_{n+1}\right)\\
&\leq (1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu_i f(x_i).$$

Es folgt, dass

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq (1-\lambda_{n+1})\sum_{i=1}^n \mu_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

Hausaufgabe 13.4 Zeigen Sie: Die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

ist stetig in $x = 0$ aber nicht differenzierbar.
Lösung: Die Funktion

$$\phi : [-1, 0] \to \mathbb{R} x \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

ist stetig, weil $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Auch gilt $\phi(x) \neq 0$ für alle $x \in [-1, 0]$. Weil $[-1, 0]$ kompakt ist, besitzt $|\phi|$ ein Minimum und ein Maximum auf $[-1, 0]$. Es gibt darum $c, C > 0$ mit $c \leq |\phi| \leq C$. Für hinreichend kleine $x \geq 0$ gilt $x \log(x) \in [-1, 0]$. Es folgt, dass

$$|x^x - 1| = |e^{x \log(x)} - 1| = |x \log(x) \phi\big(x \log(x)\big)| \leq Cx |\log(x)|.$$

Die rechte Seite konvergiert gegen 0 wenn $x \downarrow 0$ und darum gilt $\lim_{x \downarrow 0} |x^x - 1| = 0$. Auch gilt

$$\frac{|x^x - 1|}{x} = \frac{|x \log(x) \phi\big(x \log(x)\big)|}{x} \geq c |\log(x)|$$

Die rechte Seite wird beliebig groß wenn $x \downarrow 0$ und damit divergiert $\frac{|x^x - 1|}{x}$ wenn $x \downarrow 0$.