Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Martin Barič

Sommersemester 2023

Analysis 1

1. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 1.1 Auf einer gewissen Insel sind die Einwohner in zwei Arten geteilt. Die eine lügt immer und die andere sagt stets die Wahrheit. Eines Tages trifft ein Besucher drei Einwohner der Insel. „Wir alle sind Lügner.“, warnt der erste. „Nein, nur (genau) zwei von uns sind Lügner.“, widerspricht der zweite. Der dritte behauptet: „Die anderen beiden lügen. “Welchem, falls irgendeinem, kann der Besucher vertrauen?

Präsenzaufgabe 1.2 Negiere die folgenden Aussagen (in Wörtern).

1. Es gibt ein Auto, das nicht schwarz ist.
2. Julia hat die Studienleistung erbracht und die Klausur bestanden.
3. Christian hat seinen Regenschirm vergessen oder geht zu Fuß.

Präsenzaufgabe 1.3 Schreibe die folgende Aussage mithilfe von Quantoren:
Für jedes Paar a und b rationaler Zahlen mit $a < b$ gibt es eine rationale Zahl r, sodass $a < r < b$.

Präsenzaufgabe 1.4 Sei n eine natürliche Zahl. Man zeige durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Präsenzaufgabe 1.5 Seien A, B, C Mengen. Man zeige:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Präsenzaufgabe 1.6 Sei M eine Menge mit n Elementen. Zeige, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M genau 2^n Elemente enthält.

Präsenzaufgabe 1.7 Welche der folgenden Relationen auf $\mathbb{Q}$ sind reflexiv/symmetrisch/transitiv?

1. $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid xy = 0\}$
2. $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid -5 < x - y < 5\}$

Hausaufgabe 1.1 Welche der folgenden Relationen auf $\mathbb{Q}$ sind reflexiv/symmetrisch/transitiv?

1. $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid xy \neq 0\}$
2. $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid x^2 + y^2 = 1\}$

Bei einer endlichen Menge X bezeichnet die Mächtigkeit die Anzahl der Elemente von X. Wir notieren die Mächtigkeit von X durch $|X|$.

Hausaufgabe 1.2 Seien X und Y endliche Mengen. Man zeige

(a) $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$,

(b) $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.

Hausaufgabe 1.3 Sei n eine natürliche Zahl. Man zeige durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 .$$

Hausaufgabe 1.4 Seien A, B und C Teilmengen einer Menge X. Man nennt

$$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

die symmetrische Differenz von A und B. Man zeige:

(a) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$;

(b) $A \Delta B = A \Delta C \Longleftrightarrow B = C$.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 21.04.2023, 11 Uhr in das blaue Postfach Nr. 1 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.