Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Martin Barič

Sommersemester 2023

Analysis 1

4. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 4.1 Konstruieren Sie eine injektive Abbildung $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$.

Präsenzaufgabe 4.2 Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(i) f ist genau dann surjektiv, wenn f eine Rechtsinverse besitzt.

(ii) f ist genau dann bijektiv, wenn f eine Inverse besitzt.

Präsenzaufgabe 4.3 Seien X, Y und Z Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(i) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv;

(ii) Sind g und f injektiv, so auch $g \circ f$;

(iii) Genau dann ist g injektiv, wenn für beliebige Abbildungen $f_1, f_2 : X \to Y$ aus $g \circ f_1 = g \circ f_2$ schon folgt, dass $f_1 = f_2$.

Präsenzaufgabe 4.4 Seien $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $A, B \subseteq X$. Zeigen Sie:

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ und

(ii) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

(iii) Geben Sie jeweils ein Beispiel an, bei dem in (ii) keine Gleichheit bzw. Gleichheit gilt.

Präsenzaufgabe 4.5 Geben Sie ein Beispiel für Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ an, bei dem weder f noch g bijektiv sind, aber $g \circ f$ bijektiv ist.

Hausaufgabe 4.1 Konstruieren Sie eine injektive Abbildung $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

Hausaufgabe 4.2 Seien X, Y und Z Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(i) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv;

(ii) Sind g und f surjektiv, so auch $g \circ f$;

(iii) Genau dann ist f surjektiv, wenn für beliebige Abbildungen $g_1, g_2 : Y \to Z$ aus $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ schon folgt $g_1 = g_2$.

Hausaufgabe 4.3 Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $V, W \subseteq Y$. Zeigen Sie:

(i) $f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$,

(ii) $f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$.

Hausaufgabe 4.4 Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(i) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ für $B \subseteq Y$

(ii) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ für $A \subseteq X$

(iii) f ist genau dann surjektiv, wenn $f(f^{-1}(B)) = B$ für alle $B \subseteq Y$.

(iv) f ist genau dann injektiv, wenn $A = f^{-1}(f(A))$ für alle $A \subseteq X$.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 12.5.2023, 11 Uhr in das blaue Postfach Nr. 1 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.