Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Martin Barič

Sommersemester 2023

Analysis 1

2. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 2.1 Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften eines geordneten Körpers $(K, +, \cdot, <)$:

(a) $x > 0, y < 0 \Longrightarrow xy < 0$,

(b) $x > 1 \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1$,

(c) $x_1 < y_1$, $x_2 < y_2 \Longrightarrow x_1 + x_2 < y_1 + y_2$,

(Hierbei sind x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 jeweils Elemente aus K.)

Präsenzaufgabe 2.2 Zeigen Sie: In einem angeordneten Körper K gilt:

$$\frac{1}{x+y} \neq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

für alle $x, y \in K$ mit $xy \neq 0$ und $x + y \neq 0$.

Präsenzaufgabe 2.3 (Aufgabe 2 in §2.5 von Königsberger) Zeigen Sie:
Für $0 < a < b$ und $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, gilt $0 < \sqrt[k]{b} - \sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b-a}$.

Präsenzaufgabe 2.4 (Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel) Zeigen Sie: Für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n \geq \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Hinweis: Benütze vollständige Induktion. Für den Induktionsschritt kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_{n+1} \geq x_i$ für $i = 1, \dots n$. Zeige mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} x_i}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x_{n+1} - x_a}{(n+1)x_a}\right)^{n+1} \geq \frac{x_{n+1}}{x_a},$$

wobei x_a das aritmetisch Mittel $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ist. Zeige dann, dass

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^{n+1} \geq \prod_{i=1}^{n+1} x_i.$$

Präsenzaufgabe 2.5 Bestimmen Sie das Supremum und Infimum folgender Mengen:

(a) $A = \{(-1)^n \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $B = \{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Hausaufgabe 2.1 Zeigen Sie, dass $K = \{a+b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation ein Körper ist.

Hausaufgabe 2.2 Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Für ganze Zahlen m, n mit $0 \leq m \leq n$ gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Hausaufgabe 2.3 (Aufgabe 3 in §2.5 von Königsberger) Zeigen Sie:
Für $x_1, \ldots, x_n > 0$ mit $\prod_{j=1}^{n} x_j = 1$ gilt $\sum_{j=1}^{n} x_j \geq n$; dabei tritt das Gleichheitszeichen nur ein im Fall $x_1 = \cdots = x_n = 1$.

Hausaufgabe 2.4 **(Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)** Zeigen Sie:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hinweis: Definieren Sie für $i = 1, \ldots, n$

$$X_i := \frac{|x_i|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}} \quad \text{und} \quad Y_i := \frac{|y_i|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{X_i^2 Y_i^2} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 + Y_i^2) = 1.$$

Hausaufgabe 2.5 Bestimmen Sie das Supremum und Infimum folgender Mengen:

(a) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$,

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} : 0 < \left|\frac{x-1}{x+2}\right| < 1\}$.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 28.04.2023, 11 Uhr in das blaue Postfach Nr. 1 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.