Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Martin Barič

Sommersemester 2023

Analysis 1

3. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 3.1 Gegeben sei die Menge

$$M := \left\{ \frac{1+|x|}{3+x^2} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmen Sie $\sup M$ und $\inf M$.

Präsenzaufgabe 3.2 Für zwei Mengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ sei

$$X \cdot Y := \{xy : x \in X, y \in Y\}.$$

Zeigen Sie: Sind X und Y nach oben beschränkt, so gilt

$$\sup(X \cdot Y) = \sup(X)\sup(Y).$$

Präsenzaufgabe 3.3 Geben Sie eine geometrische Beschreibung der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ an und skizzieren Sie diese:

(a) $M = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3 + 2i| = 5\}$,

(b) $N = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq |z - 1|\}$,

(c) $P = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1, -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{1}{2}, \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Präsenzaufgabe 3.4 Für $c = a + ib \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zeige man, dass die Gleichung $z^2 = c$ genau zwei Lösungen besitzt, und stelle diese Lösungen durch a und b dar.

Hausaufgabe 3.1 Gegeben sei die Menge

$$A := \left\{ \frac{|1 - xy|}{(1 + x^2)(1 + y^2)} : x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \right\}.$$

Bestimmen Sie $\sup A$ und $\inf A$. Existieren $\max A$ und $\min A$?

Hausaufgabe 3.2

(a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und sei $-A := \{-x : x \in A\}$. Zeigen Sie:

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

(b) Sei I eine Menge und für $i \in I$, sei $A_i \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren die Vereinigung von alle Teilmengen A_i durch

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in \mathbb{R} : \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in A_i\}.$$

Nehmen Sie an, dass $m_i := \sup A_i$ existiert. Beweisen Sie: Wenn es ein $C > 0$ gibt, so dass $m_i \leq C$ für alle $i \in I$, dann existiert das Supremum von $\bigcup_{i \in I} A_i$ und

$$\sup\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \sup\{m_i : i \in I\}.$$

Hausaufgabe 3.3 Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil und Betrag folgender komplexer Zahlen:

(a) $(x + iy)^3 - (x - iy)^3$ für $x, y \in \mathbb{R}$,

(b) $(2 + i)^{-1}$,

(c) $\frac{i}{1+i}$.

Hausaufgabe 3.4 Berechnen Sie Real- und Imaginärteil und Betrag von

$$z_n := \left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}} \right)^n$$

für $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Zeige erst, dass $z_{n+8} = z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 5.5.2023, 11 Uhr in das blaue Postfach Nr. 1 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.