Universität Paderborn Sommersemester 2023
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Martin Barič

Analysis 1

6. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 6.1 *(Newtonverfahren)* Seien $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n - c$. Wir schreiben f' für die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto nx^{n-1}$. Sei $x_0 = 1$ und definiere für $k \in \mathbb{N}$ rekursiv

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}.$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktionen f und

$$t_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

(b) Zeigen Sie, dass x_1 die einzige Nullstelle von t_0 ist.

(c) Geben Sie eine Beschreibung von x_k. Malen Sie Bilder!

(d) Zeigen Sie, dass $x_k^n \geq c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. (*Hinweis:* Die Bernoulli Ungleichung könnte hilfreich sein.)

(e) Zeigen Sie, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

(f) Zeigen Sie, dass $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und $\lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt[n]{c}$.

Präsenzaufgabe 6.2 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Beweisen Sie, dass die Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$G_n := \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$$

gegen a konvergiert.

Präsenzaufgabe 6.3 Bestimmen Sie jeweils für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alle Häufungswerte und geben Sie, soweit vorhanden, den Limes superior und den Limes inferior an.

(a) $a_n = n$,

(b) $a_n = 2(-1)^n + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$,

(c) $a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{4^{n+1} + (-3)^n}$.

Hausaufgabe 6.1 Für $k \in \mathbb{N}$, sei $a_k \in \mathbb{R}$. Nehme an, dass $\sup\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ und $\inf\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ existieren. Definiere

$$\begin{aligned} s_n &:= \sup\{a_k : k \geq n\}, \\ i_n &:= \inf\{a_k : k \geq n\}. \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und die Folge $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist.

(b) Zeige, dass die Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Wir schreiben s bzw. i für die Limes.

(c) Sei $\mathcal{H}$ die Menge von Häufungspunkten von $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. Zeige

$$\sup \mathcal{H} = s \quad \text{und} \quad \inf \mathcal{H} = i.$$

Hausaufgabe 6.2 Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.
Hinweis: Die Identität $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ könnte von Vorteil sein.

Hausaufgabe 6.3 Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Fibonacci-Folge, d. h. $f_1 = 1, f_2 = 1$ und für $n \geq 3$ gilt $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{2^k}.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $s_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(b) $\lim_{n\to\infty} s_n = 2$,

(c) $\sup\{s_n : n \in \mathbb{N}\} = 2$.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 26.5.2023, 11 Uhr in das blaue Postfach Nr. 1 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.