Universität Paderborn Sommersemester 2023
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Martin Barič

Analysis 1

7. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 7.1 (Königsberger Aufgabe 5.8.15) Für eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ sei $S_k := \sup\{a_n : n \geq k\}$. Zeigen Sie: Die Folge $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fällt monoton, und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} S_k.$$

Charakterisieren Sie entsprechend den Limes inferior.

Präsenzaufgabe 7.2 (Königsberger Aufgabe 5.8.16) Zeigen Sie: Jede Folge reeller Zahlen besitzt eine monotone Teilfolge.

Präsenzaufgabe 7.3 Für $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, versteht man unter einem b-adischen Bruch eine Reihe der Gestalt

$$\pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_{-n} b^{-n}.$$

Hierbei ist $k \geq 0$ und die a_n sind ganze Zahlen mit $0 \leq a_n < b$. Schreibweise: $\pm a_k a_{k-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots$.

(a) Man zeige: Jeder b-adische Bruch stellt eine Cauchy-Folge dar, konvergiert also gegen eine reelle Zahl.

(b) Man zeige: Jede reelle Zahl läßt sich in einen b-adischen Bruch entwickeln; das heißt, zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\leq k}$ ein $a_n \in \{0, \dots, b-1\}$ mit $x = \pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_{-n} b^{-n}$.

(c) Man entwickle $x = \frac{1}{2}$ in einen b-adischen Bruch für $b = 3$.

Präsenzaufgabe 7.4 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge. Zeigen Sie den *Verdichtungssatz von Cauchy*: Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ konvergent ist.

Hausaufgabe 7.1 Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch keine Primzahl p mit $p \neq 3$ und $p \neq 7$ teilbar sind. Zeigen Sie, dass gilt

$$\sum_{n\in\Omega} \frac{1}{n} = \frac{7}{4}.$$

Hausaufgabe 7.2 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $c \in \mathbb{R}$, $0 \leq c < 1$. Es gelte $|a_{n+2} - a_{n+1}| = c|a_{n+1} - a_n|$ für alle $n \in N$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, also konvergiert. Ermittlen Sie eine divergente Folge mit $|a_{n+2} - a_{n+1}| < |a_{n+1} - a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hausaufgabe 7.3 Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty}(-a_n)$.

(b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent genau dann, wenn sie beschränkt ist und $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Hausaufgabe 7.4 (Königsberger Aufgabe 5.8.11) Einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ordne man die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu, wobei

$$s_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(a) Zeigen Sie: Aus $a_n \to a$ folgt auch $s_n \to a$.

(b) Geben Sie eine divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, für die $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert .

Hausaufgabe 7.5 (Königsberger Aufgabe 5.8.17) Zeigen Sie: Eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$, die nicht konvergiert, hat mindestens zwei verschiedene Häufungspunkte und besitzt daher zwei Teilfolgen mit unterschiedlichen Grenzwerten.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 02.06.2023, 11 Uhr in das blaue Postfach Nr. 1 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.