Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Martin Barič

Sommersemester 2023

Analysis 1

8. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 8.1 Die Riemannsche ζ-Funktion ist für $s \in \mathbb{Q}$ mit $s > 1$ definiert durch

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

(a) Zeigen Sie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \big(\zeta(k) - 1\big) = 1.$$

(b) Es sei $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $p_k < p_{k+1}$, die Folge der Primzahlen und für jedes $N \in \mathbb{N}$ sei J_N die Menge der natürlichen Zahlen, deren Primfaktoren zu $\{p_1, \dots, p_N\}$ gehören. Zeigen Sie: Für jedes rationale $s > 0$ ist die Familie $\left(\frac{1}{n^s}\right)_{n\in J_N}$ summierbar mit

$$\sum_{n\in J_N} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} =: P_N.$$

(c) Folgern Sie im Falle $s \in \mathbb{Q}$ mit $s > 1$ die Eulersche Produktdarstellung der Riemannschen ζ-Funktion:

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} := \lim_{N\to\infty} P_N.$$

Präsenzaufgabe 8.2 Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{n}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+17}{n^3 + 2n^2 + n + 1}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + 2^{-k}}{k^2 - 3k - 1}$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt[k]{3} - 1)$,

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 2^k}{(2k)!}$,

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)$.

Hausaufgabe 8.1 Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2^{-n}+3^{-n})$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^4}{3^k}$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=52}^{\infty}(\sqrt[k]{k}-1)^k$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\prod_{n=1}^{k}\frac{2n}{3n+2}$,

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{(2k)^k}$,

Hausaufgabe 8.2 Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Reihen mit positiven Summanden. Zeigen Sie: Gibt es $K, L \in \mathbb{R}$, $0 < K < L$, mit $K < \frac{a_n}{b_n} < L$ für alle n, so gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent} \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ ist konvergent.}$$

Hausaufgabe 8.3 Es sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller positiver monoton wachsender Zahlen. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e_{n+1}}{e_n}-1\right)$$

konvergiert.

Hausaufgabe 8.4 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Nehmen Sie an, dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergent ist. Zeigen Sie, dass $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $na_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 09.06.2023, 11 Uhr in das blaue Postfach Nr. 1 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.