Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Martin Barič

Sommersemester 2023

Analysis 1

9. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 9.1 Für $s \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, sei $B_s(z)$ die Binomialreihe

$$B_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k,$$

wobei $\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-k+1)}{k!}$.

(a) Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $B_s(z)$ gleich 1 ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und $s, t \in \mathbb{C}$

$$B_0(z) = 1 \quad \text{und} \quad B_s(z)B_t(z) = B_{s+t}(z).$$

(c) Zeigen Sie jetzt, dass $B_s(z) \neq 0$ und $B_s(z) = B_{s/2}(z)^2$. Folgern Sie, dass $B_s(x) > 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

(d) Zeigen Sie, dass für alle $s \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt, dass

$$B_s(x) = (1+x)^s.$$

(e) Berechnen Sie die ersten 5 Glieder der Potenzreihe für $\sqrt{1+x} = B_{\frac{1}{2}}(x)$.

Präsenzaufgabe 9.2 Berechnen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k^{k+1}} z^k,$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^{10}+k} z^k.$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{3k+1} \right) z^n,$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3+2+(-1)^n}{n^3+3} \right)^n z^n.$

Hausaufgabe 9.1 Berechnen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 3^k z^{3k}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty} \binom{n}{k} z^n$ für $k \in \mathbb{N}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n+3} z^n$,

Hausaufgabe 9.2 Betrachten Sie die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie, dass es eine Zahl $e \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, sodass für alle $x \in \mathbb{Q}$

$$\exp(x) = e^x.$$

(d) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$$

gilt.

(e) Beweisen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$

$$|\exp(z)| = \exp\big(\mathrm{Re}(z)\big)$$

und insbesondere, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$|\exp(ix)| = 1$$

gilt.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 16.06.2023, 11 Uhr in das blaue Postfach Nr. 1 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.