Universität Paderborn Sommersemester 2023
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Martin Barič

Analysis 1

10. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 10.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Beweisen Sie, dass die Funktion $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ stetig ist.

Präsenzaufgabe 10.2 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche Implikationen bestehen zwischen den folgenden Aussagen:

(a) f ist im Punkt $x_0 \in [a, b]$ stetig.

(b) Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a, b]$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ist die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(c) Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a, b] \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ist die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Präsenzaufgabe 10.3 Ermittlen Sie alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ und $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Präsenzaufgabe 10.4 Zeigen Sie: Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann injektiv, wenn sie strikt monoton ist.

Präsenzaufgabe 10.5 Untersuchen Sie die Reihen

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^n - x^{n+1})$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz im Intervall $I = [0, 1]$.

Hausaufgabe 10.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Nehme an, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Beweisen Sie, dass die Funktion $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ stetig ist.

Hausaufgabe 10.2 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x < \sqrt{2} \\ 0, & \text{falls } x > \sqrt{2} \end{cases}$$

stetig ist.

Hausaufgabe 10.3 Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien stetig und es gelte $f(q) = g(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 10.4 Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat, das heißt es existiert ein $x \in [0,1]$, sodass $f(x) = x$. *Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - x$ *an.*

Hausaufgabe 10.5 Unter welchen Voraussetzungen ist eine Funktion

$$f : \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$$

stetig?

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 23.06.2023, 11 Uhr in das blaue Postfach Nr. 1 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.