Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Martin Barič

Sommersemester 2023

Analysis 1

11. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 11.1 Beweisen Sie den *Fundamentalsatz der Algebra*: Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten besitzt in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst für $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$:

(a) $|P|$ nimmt auf $\mathbb{C}$ ein Minimum an.

(b) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) \neq 0$ und setze $Q(z) = \frac{P(z+z_0)}{P(z_0)}$. Dann ist $Q(z)$ ein Polynom vom Grad n. Es gibt $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$, sodass

$$Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + 1$$

und $b_n \neq 0$.

(c) Sei $m := \min\{k \in \mathbb{N} : b_k \neq 0\}$. Beachte dabei, dass $1 \leq m \leq n$. Dann gibt es ein Polynom $R(z)$, sodass

$$Q(z) = 1 + b_m z^m + z^{m+1} R(z).$$

(d) Es gibt ein $\phi \in \mathbb{C}$, sodass $\phi^m = \frac{-1}{b_m}$. Außerdem gilt für alle $r \in \mathbb{R}$, dass

$$Q(r\phi) = 1 - r^m + r^{m+1} \phi^{m+1} R(r\phi).$$

(e) Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r \mapsto |Q(r\phi)|$ hat kein Minimum in $r = 0$. *Hinweis:* Betrachte zuerst der Fall $R(z) = 0$.

(f) $|Q|$ hat kein Minimum an der Stelle $z = 0$.

(g) $|P|$ hat an einer Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) \neq 0$ kein Minimum.

Präsenzaufgabe 11.2 Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Ist f stetig?

Präsenzaufgabe 11.3 (*Königsberger Aufgabe 7.9.7.*) Berechnen Sie im Existenzfall die Grenzwerte von

(a) $\frac{z^m - 1}{z^n - 1}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{e^{2\pi i \cdot \frac{k}{n}} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1\}$, $z \to 1$, $\qquad (m, n \in \mathbb{N})$;

(b) $x(x - \lfloor x \rfloor)$ für $x \in \mathbb{R}$, $x \to 0$;

(c) $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$ für $x \in \mathbb{R}$, $x \to \infty$;

(d) $\frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|^s}$ für $z \in \mathbb{C}^*$, $z \to 0 \qquad (s \in \mathbb{Q})$.

Präsenzaufgabe 11.4 Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^5 = -32.$$

Hausaufgabe 11.1 Die Funktionen Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus sind definiert durch

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \qquad & z \mapsto \sinh(z) := \frac{1}{2}\big(e^z - e^{-z}\big), \\ \cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \qquad & z \mapsto \cosh(z) := \frac{1}{2}\big(e^z + e^{-z}\big). \end{aligned}$$

(a) Beweisen Sie, dass sinh und cosh stetig sind.

(b) Ermitteln Sie Potenzreihendarstellungen für diese Funktionen.

(c) Zeigen Sie, dass sinh die Menge $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet und bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

(d) Beweisen Sie für $z \in \mathbb{C}$, dass

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1.$$

(e) Skizzieren Sie die Graphen der (reellen) Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sinh(x)$ und $x \mapsto \cosh(x)$.

Hausaufgabe 11.2 Sei $f : \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

Hausaufgabe 11.3 Zeigen Sie die Identität

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hausaufgabe 11.4 (*Königsberger 8.13.3.*) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n, \quad b_n := \big(1 + \frac{1}{n}\big)^{n+1}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wächst streng monoton, die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fällt streng monton, und für alle n gilt $a_n < e < b_n$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

und

$$e^{-n}(n+1)^n < n! < e^{-n}(n+1)^{n+1}$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 30.06.2023, 11 Uhr in das blaue Postfach Nr. 1 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.