Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Martin Barič

Sommersemester 2023

Analysis 1

12. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 12.1 Berechnen sie die Ableitungen der Funktionen

(a) $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,

(b) $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$,

(c) $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

(d) $\operatorname{arsinh} = \sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(e) $\operatorname{arcosh} = \cosh^{-1} : (1, \infty) \to (0, \infty)$.

Präsenzaufgabe 12.2 Zeigen Sie: Die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

ist stetig in $x = 0$ aber nicht differenzierbar.

Präsenzaufgabe 12.3 Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0. \end{cases}$$

Skizzieren Sie den Graphen von f und zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist.

Präsenzaufgabe 12.4 Zeigen Sie für hinreichend oft differenzierbare Funktionen f, g die Leibniz-Formel:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Hausaufgabe 12.1 Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit in $x = 0$:

(i) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[3]{x}$,

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{|x|}$,

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x|x|$.

Hausaufgabe 12.2 Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei H_n gegeben durch

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Beweisen Sie, dass $H_n(x)$ ein Polynom vom Grad n ist. Diese Polynome werden die Hermiteschen Polynome (nach Charles Hermite) genannt.

(b) Berechnen Sie H_0, H_1, H_2, H_3 und H_4.

(c) Beweisen Sie, dass die Hermiteschen Polynome eindeutig bestimmt werden durch $H_0(x) = 1$ und die Rekursionsformel

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - \frac{d}{dx} H_n(x) \qquad (n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}).$$

(d) Beweisen Sie, dass die Hermiteschen Polynome auch eindeutig bestimmt werden durch $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$ und die Rekursionsformel

$$H_{n+2}(x) = 2xH_{n+1}(x) - 2(n+1)H_n(x) \qquad (n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}).$$

Hinweis: Zeigen Sie, mit Hilfe der Leibniz-Formel, dass

$$\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} e^{-x^2} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \big(-2xe^{-x^2} \big) = -2x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} - 2(n+1) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

(e) Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ das Hermitesche Polynom H_n die Differenzialgleichung

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

erfüllt.

Hausaufgabe 12.3 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Beweisen Sie,

(a) Wenn f gerade ist, dann ist f' ungerade.

(b) Wenn f ungerade ist, dann ist f gerade.

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 07.07.2023, 11 Uhr in das blaue Postfach Nr. 1 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.