Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Martin Barič

Sommersemester 2023

Analysis 1

13. Übungsblatt

Präsenzaufgabe 13.1 Sei $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.

(a) Beweisen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} x^n$$

gleich R ist.

(b) Beweisen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1) a_n x^n$$

gleich R ist.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$. Beweisen Sie, dass F differenzierbar in x ist und

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

(d) Beweisen Sie, dass F sogar unendlich oft differenzierbar in x ist und für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$F^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1) a_{n+k} x^n.$$

(e) Zeien Sie, dass $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

Präsenzaufgabe 13.2 Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen:

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{5 + e^x}\, dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\, dx$.

Präsenzaufgabe 13.3 Bestimmen Sie die Extremstellen und Extremwerte der Funktion $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x e^{-x}$.

Präsenzaufgabe 13.4 Sind folgende Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre jeweiligen Antworten.

(a) Sind $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und $\alpha, \beta \geq 0$, so ist auch $\alpha f_1 + \beta f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex.

(b) Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Folge konvexer Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so ist die Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ebenfalls konvex.

(c) Jede konvexe Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Hausaufgabe 13.1 Bestimmen Sie die Stammfunktionen von folgenden Funktionen:

(a) $\displaystyle\int \sin(x)e^{\cos(x)}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$,

Hausaufgabe 13.2 Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 \sin(x^2-2x-3)}{x^2-5x+6}.$$

Hausaufgabe 13.3 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = e^x + x^{117} + x^7 + x^{23} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist. *Hinweis:* Untersuchen Sie f auf Monotonie und bestimmen Sie das Grenzverhalten $x \to \pm\infty$.

(b) Berechnen Sie $(f^{-1})'(1)$.

Hausaufgabe 13.4 Bestimmen Sie die Stammfunktionen von

$$\mathbb{R}\setminus\{-2\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^7-1}{(x+2)^5}.$$

Hausaufgabe 13.5 Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $[a,b]$. Beweisen Sie den Satz von Darboux: f' nimmt auf $[a,b]$ jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an. *Hinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass* $f'(a) > f'(b)$. *Betrachten Sie* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - \lambda x$ *mit* $f'(a) > \lambda > f'(b)$. *Beweisen Sie, dass* g *stetig ist und damit, dass* g *sein Maximum auf* $[a,b]$ *in einem Punkt* $y \in [a,b]$ *annimmt. Beweisen Sie, dass* $y \in (a,b)$ *und darum* $g'(y) = 0$.
Aus dem Satz folgt nicht, dass f' stetig ist. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

differenzierbar ist. Ist f' stetig in 0?

Abgabe der Hausaufgaben: Freitag, 14.07.2023, 11 Uhr in das blaue Postfach Nr. 1 auf D1 unter Angabe des Namens und der Übungsgruppe.