Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Martin Barič

Sommersemester 2023
1. Prüfung, 31. Juli, 2023

Analysis 1
Lösungsvorschlag

Name: XXXXXXX

Matrikelnummer: XXXXXXX

Wichtige Informationen:

- Keine Hilfsmittel sind erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus sechs Aufgaben mit insgesamt 70 Punkten. Man hat bestanden, wenn man mindestens 35 Punkte erreicht hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Summe**
X	X	X	X	X	X	X

Aufgabe 1: (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie den Betrag von $\dfrac{(3-i)^2}{3+i}$. (5 P.)

(b) Skizzieren Sie die Menge

$$D = \{z \in \mathbb{C} : (z^6 - 1)(z^3 - 8) = 0\}$$

in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$. (5 P.)

Lösung:

(a) Wir erweitern den Bruch durch das Komplexkonjugierte des Nenners, i.e. durch $\overline{3+i} = 3-i$*:*

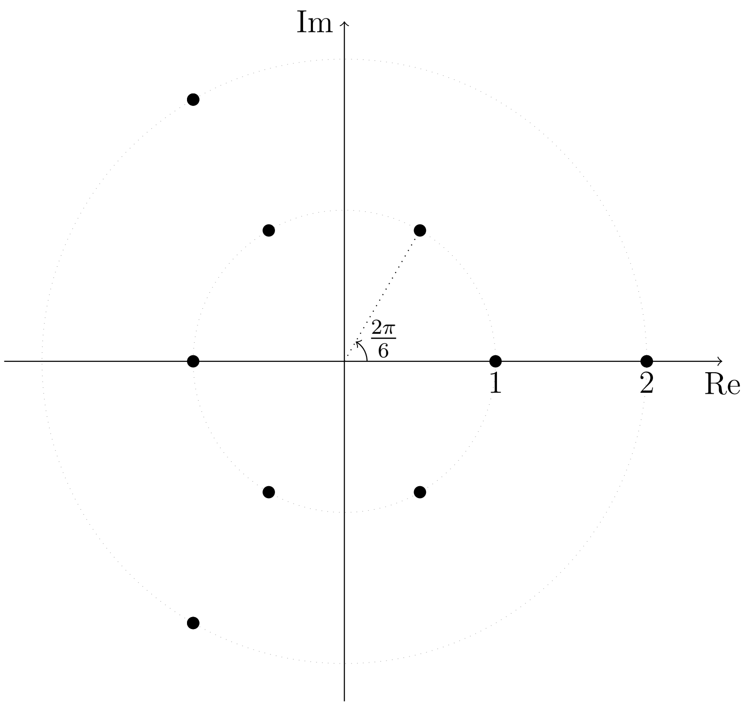
$$\begin{aligned}\frac{(3-i)^2}{3+i} &= \frac{(3-i)^2}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i} = \frac{(3-i)^3}{3^2+1^2} \overset{(*)}{=} \frac{3^3 - 3\cdot 3^2\cdot i + 3\cdot 3\cdot i^2 - i^3}{10} \\ &= \frac{27 - 27\cdot i - 9 + i}{10} = \frac{18 - 26\cdot i}{10} = \frac{9}{5} - \frac{13}{5}i.\end{aligned}$$

An der Stelle $(*)$ haben wir den Binomischen Lehrsatz für den Exponenten 3 verwendet. Von dieser Darstellung können wir nun den Real- und Imaginärteil sofort ablesen.

Was den Betrag angeht können wir es beispielsweise mit dem vorherigen Ergebnis ausrechnen. Alternativ und einfacher können wir jedoch ausnutzen, dass $|z| = |\overline{z}|$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt. Wir setzen $z := 3+i$ und erhalten sofort

$$\left|\frac{(3-i)^2}{3+i}\right| = \left|\frac{\overline{z}^2}{z}\right| = \frac{|\overline{z}|^2}{|z|} = |z| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}.$$

(b) Die Menge D sieht in der komplexen Ebene wie folgt aus:



Um dies etwas näher zu erläutern[1], *erinnern wir uns an den* **Fundamentalsatz der Algebra**: *wir wissen, dass jedes komplexe Polynom vom Grad n, mit Vielfachheiten gezählt, genau n komplexe Nullstellen besitzt. Das Polynom z^6-1 hat daher 6 Nullstellen. Nach Vorlesung sind diese die 6-ten Einheitswurzeln*

$$1 = e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot 0}, e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot 1}, e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot 2}, \ldots, e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot 5},$$

und sie liegen alle auf dem Einheitskreis. Mit anderen Worten haben wir die Zerlegung von $z^6 - 1$ in Linearfaktoren als

$$z^6 - 1 = \prod_{k=0}^{5} \left(z - e^{\frac{2\pi i}{6}\cdot k}\right).$$

Was die Polynomialfunktion $z^3 - 8$ angeht, ist es ganz analog: sie hat die reelle Nullstelle $z = 2$ und die anderen erhält man durch Multiplikation der 3-ten Einheitswurzeln an diese Nullstelle $z = 2$. Also zerfällt $z^3 - 8$ in Linearfaktoren als

$$z^3 - 8 = \prod_{k=0}^{2} \left(z - 2 \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}\cdot k}\right).$$

Somit besteht D aus genau den Nullstellen von diesen beiden Polynomen.

[1] Für das Erreichen der vollen Punktzahl in der Klausur reicht die Skizze. Diese Erläuterung ist für die Abgabe nicht notwendig.

Aufgabe 2: (10 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Folge

$$\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. (5 P.)

(b) Untersuchen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

konvergent ist und bestimmen Sie in diesen Fällen den Grenzwert.
Hinweis: Betrachten Sie die Ableitung der geometrischen Reihe. (5 P.)

Lösung:

(a) Nach dem ***Fundamentallemma*** *aus der Vorlesung (siehe Kapitel 8.1. in Königsberger Analysis I) ist die Folge konvergent mit*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3.$$

Alternativ ist

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(x/3)}\right)^{(x/3)\cdot 3}\\ &\overset{t:=x/3}{=} \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^3 \overset{(*)}{=} \left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^3 = e^3.\end{aligned}$$

An der Stelle $(*)$ haben wir die Stetigkeit der Funktion $f(x) = x^3$ ausgenutzt, sowie die Kenntnis, dass $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ für $t \to \infty$ existiert.

(b) Da

$$\limsup \sqrt[n]{|(n+1)x^n|} = |x| \cdot \limsup \sqrt[n]{(n+1)} = |x|\,,$$

ist nach nach dem Wurzelkriterium der Konvergenzradius 1. Das bedeutet, die Reihe konvergiert für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. In den Grenzfällen $x \in \{\pm 1\}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)x^n \neq 0,$$

und daher ist die Potenzreihe in diesen Fällen ebenfalls divergent.

Nun zum Grenzwert: wir kennen den Grenzwert der geometrischen Reihe. Für $x \in (-1,1)$ ist dieser

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Außerdem wissen wir nach Übungsblatt 13, Präsenzaufg.1c, dass Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradiuses (beliebig oft) differenzierbar sind, und die Ableitung vertauscht mit dem Grenzwert. Mit anderen Worten gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' \overset{\text{ÜB.13}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,\end{aligned}$$

was zu berechnen war.

Aufgabe 3: (10 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x + x + 1$.

(a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist. (5 P.)

(b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f. Bestimmen Sie $g'(2)$. (5 P.)

Lösung:

(a) *Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit*

$$f'(x) = e^x + 1 > 0 \qquad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Daher ist $f(x)$ strikt monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$. Zusammen mit der Stetigkeit von $f(x)$ folgern wir, dass $f(x)$ injektiv ist (siehe hierzu das Übungsblatt 10, Präsenzaufgabe 4).

Außerdem gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Da $f(x)$ stetig ist, ist $f(x)$ nach dem Zwischenwertsatz auch surjektiv.

(b) *Ist $g(x)$ die Umkehrfunktion von $f(x)$, so gilt $f(g(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt $f(0) = 2$, was äquivalent zu $g(2) = 0$ ist. Aus der Kettenregel erhalten wir*

$$1 = (x)' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

und somit schließlich

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4: (20 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge ist, dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent. (5 P.)

(b) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x-1}\right), & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

ist stetig. (5 P.)

(c) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}$. Wenn die Folge $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ konvergiert, dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Stammfunktion F von f. (5 P.)

(d) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ist, dann ist die Folge $\left(\frac{a_n}{1+a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. (5 P.)

Lösung:

(a) *Diese Aussage ist* ***wahr****. Da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert ein $c > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $|b_n| < c$. Es folgt*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ist also absolut konvergent, und somit insbesondere konvergent.

(b) *Diese Aussage ist* ***falsch****. Die Funktion $f(x)$ ist in jedem Punkt $x \neq 1$ als Komposition von stetigen Funktionen stetig. Daher ist $f(x)$ genau dann stetig auf ganz $\mathbb{R}$, wenn sie stetig in $x = 1$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn*

$$\lim_{x\to 1} \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0.$$

Aus der Vorlesung ist dies dazu äquivalent, dass für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \xrightarrow{(n\to\infty)} 1$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{a_n - 1}\right) = 0.$$

Wir betrachten speziell die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n := 1 + \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)}.$$

Es ist sicherlich $a_n \xrightarrow{(n\to\infty)} 1$. Es gilt jedoch

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{a_n - 1}\right) &= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)}\right) - 1}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

(c) *Diese Aussage ist* **falsch**. *Beispielsweise konvergieren die konstanten Funktionen* $f_n(x) := (-1)^n$ *nirgendwo punktweise, aber ihre Ableitungen* $f_n'(x) = 0$ *konvergieren sogar gleichmäßig gegen* $f(x) = 0$.

(d) *Diese Aussage ist* **wahr**. *Sei* $n \in \mathbb{N}$ *beliebig. Wegen* $a_n \geq 0$ *gilt*

$$0 \leq \frac{a_n}{1+a_n} \leq \frac{1+a_n}{1+a_n} = 1.$$

Also ist die gegebene Folge $\left(\frac{a_n}{1+a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt. Desweiteren gilt*

$$\frac{a_{n+1}}{1+a_{n+1}} - \frac{a_n}{1+a_n} = \frac{a_{n+1}(1+a_n) - a_n(1+a_{n+1})}{(1+a_n)(1+a_{n+1})} = \frac{a_{n+1} - a_n}{(1+a_n)(1+a_{n+1})} \geq 0,$$

da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *selbst monoton wachsend ist. Also ist auch die Folge* $\left(\frac{a_n}{1+a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton wachsend. Nach einer Konsequenz des Satzes von Bolzano-Weierstraß ist diese Folge konvergent.*

Aufgabe 5: (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle lokale Minima und Maxima der Funktion (5 P.)

$$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^x}{x^e}.$$

(b) Was ist größer, e^π oder π^e?
Eine Approximationslösung wird hier nicht akzeptiert. (5 P.)

Lösung:

(a) Die Funktion $f(x)$ ist differenzierbar. Unter Verwendung der Quotientenregel für differenzierbare Funktionen haben wir

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^e - e \cdot x^{e-1} \cdot e^x}{x^{2e}} = \frac{e^x \cdot x^{e-1}(x-e)}{x^{2e}}.$$

Es gilt also $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = e$. Außerdem gilt $f'(x) < 0$ auf dem Intervall $(0, e)$ und $f'(x) > 0$ auf dem Intervall $(e, +\infty)$. Mit anderen Worten, $f(x)$ hat ein einziges Extremum in $x = e$ und es handelt sich hierbei um ein lokales Minimum.

(b) Wegen

$$1 = f(e) < f(\pi) = \frac{e^\pi}{\pi^e}$$

ist

$$e^\pi > \pi^e.$$

Aufgabe 6: (10 Punkte)

Bestimmen Sie das Integral $\int_0^1 \arcsin(t)\,dt$.

Hinweis: Eine Substitution von Variablen könnte hilfreich sein.

Lösung: *Wir verwenden die natürlichste Substitution die uns in den Sinn kommt; nämlich* $t := \sin(x)$ *auf dem Intervall* $t \in [0,1]$. *Unter dieser Substitution gilt* $dt := \cos(x)\,dx$. *Außerdem verändert diese die Integralgrenzen wie folgt: für* $t = 0$ *ist* $x = 0$ *denn* $\sin(0) = 0$, *und für* $t = 1$ *muss* $x = \frac{\pi}{2}$ *sein, denn* $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ *und* $\sin\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]$ *ist eine stetig differenzierbare Bijektion*[2]. *Es folgt*

$$\int_0^1 \arcsin(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \arcsin(\sin(x)) \cdot \cos(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x)\,dx.$$

Nun benutzen wir partielle Integration: für $u(x) := x$ *und* $v'(x) := \cos(x)$ *gilt*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \underbrace{x}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{=v'(x)}\,dx &= \left[\underbrace{x}_{=u(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{=v(x)}\right]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{1}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{=v(x)}\,dx \\
&= \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + [\cos(x)]_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}$$

[2]Der korrektere Term wäre **Diffeomorphismus**.