Universität Paderborn
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. Job Kuit, Martin Barič

Sommersemester 2023
2. Prüfung, 18. September, 2023

Analysis 1
Lösungsvorschlag

Name: XXXXXXX

Matrikelnummer: XXXXXXX

Wichtige Informationen:

- Keine Hilfsmittel sind erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus sechs Aufgaben mit insgesamt 70 Punkten. Man hat bestanden, wenn man mindestens 35 Punkte erreicht hat.
- Bitte arbeiten Sie nur mit dokumentenechten Schreibgeräten. Schreiben Sie nicht mit roter Farbe.
- Schreiben Sie leserlich. Der Lösungsweg muss vollständig und nachvollziehbar dokumentiert sein.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Summe**
X	X	X	X	X	X	X

Aufgabe 1: (10 Punkte)

(a) Sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$|z+1| > |z-1| \iff \mathrm{Re}(z) > 0.$$

(5 P.)

(b) Skizzieren Sie die Menge

$$D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = \big(\mathrm{Im}(z)\big)^2\}$$

in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$. (5 P.)

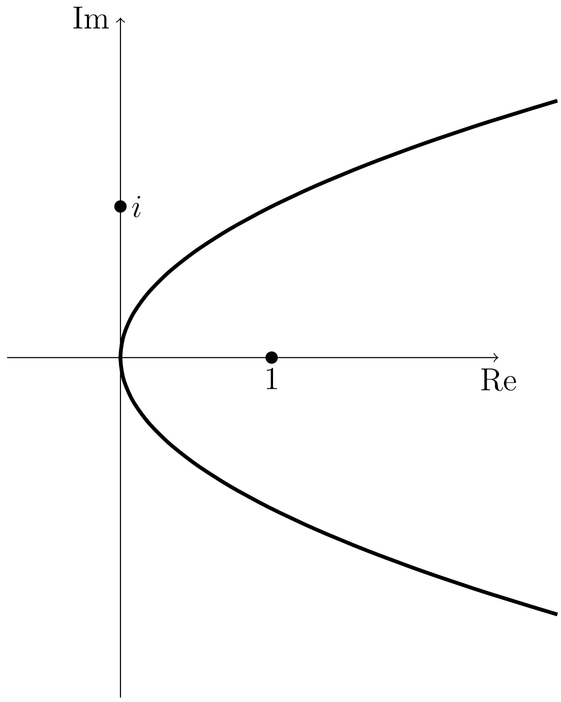
Lösung:

(a) Wir schreiben $z := a + bi$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned}
|z+1| > |z-1| &\iff |z+1|^2 > |z-1|^2 \\
&\iff |(a+1)+bi|^2 > |(a-1)+bi|^2 \\
&\iff (a+1)^2 + b^2 > (a-1)^2 + b^2 \\
&\iff a^2 + 2a + 1 + b^2 > a^2 - 2a + 1 + b^2 \\
&\iff 4a > 0 \\
&\iff a > 0.
\end{aligned}$$

Die Aussage folgt, da $a = \mathrm{Re}(z)$.

(b) Die Menge D *sieht in der komplexen Ebene wie folgt aus:*



Es handelt sich um eine nach rechts geöffnete Parabel.

Aufgabe 2: (10 Punkte)

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n = \Big(1 - \frac{1}{n+k}\Big)^n$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. (5 P.)

(b) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 - 3n - 2}$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. (5 P.)
Hinweis: Faktorisieren Sie zunächst den Nenner und benutzen Sie anschließend die Partialbruchzerlegung.

Lösung:

(a) Nach dem ***Fundamentallemma*** *gilt für* $z \in \mathbb{C}$

$$\Big(1 + \frac{z}{n+k}\Big)^{n+k} \xrightarrow{(n\to\infty)} e^z.$$

Damit erhalten wir

$$a_n = \Big(1 - \frac{1}{n+k}\Big)^n = \Big(1 + \frac{(-1)}{n+k}\Big)^{n+k} \cdot \Big(1 - \frac{1}{n-k}\Big)^{-k} \xrightarrow{(n\to\infty)} e^{-1} \cdot 1^{-k} = e^{-1}.$$

Die Folge ist demnach konvergent.

(b) Für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ *faktorisiert der Nenner als*

$$(9n^2 - 3n - 2) = (3n-2)(3n+1).$$

Machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{(9n^2-3n-2)} \overset{(!)}{=} \frac{A}{(3n-2)} + \frac{B}{(3n+1)} \quad \forall (n \in \mathbb{N})$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$*, so wissen wir nach der Partialbruchzerlegung dass es für* A, B *eindeutige Lösungen gibt. Die vorherige Gleichung ist äquivalent zu*

$$\frac{1}{(9n^2-3n-2)} \overset{(!)}{=} \frac{A(3n+1) + B(3n-2)}{(9n^2-3n-2)} \quad \forall (n \in \mathbb{N}) \rightsquigarrow A = -B \rightsquigarrow A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}.$$

Also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2-3n-2} = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(3n-2)} - \frac{1}{(3n+1)} \right) = 3 \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(3n+1)} \right) = 3,$$

und folglich ist die Reihe konvergent.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

(a) Seien $y > x > 0$. Zeigen Sie, dass

$$e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{y}} \leq (y-x)\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

Hinweis: Der Mittelwertsatz könnte hilfreich sein. (5 P.)

(b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} x\Big(1 - \cos\big(\frac{1}{x}\big)\Big)$. (5 P.)

Lösung:

(a) Sei $f(t) := e^{\frac{1}{t}}$. Dann ist $f(t)$ auf dem Intervall $[x, y]$ stetig differenzierbar mit

$$f'(t) = -\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}.$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $c \in (x, y)$, sodass

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c) = -\frac{e^{\frac{1}{c}}}{c^2}.$$

Da $x - y < 0$, ist dies äquivalent zu

$$f(x) - f(y) = (y - x) \cdot \frac{e^{\frac{1}{c}}}{c^2}.$$

Nun ist aber die Funktion $f'(t)$ auf dem Intervall $[x, y]$ monoton fallend, denn aus $c > x$ folgt

$$e^{\frac{1}{c}} < e^{\frac{1}{x}}, \quad \frac{1}{c^2} < \frac{1}{x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{e^{\frac{1}{c}}}{c^2} < \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2},$$

und damit die Behauptung, denn

$$e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{y}} = f(x) - f(y) = (y - x) \cdot \frac{e^{\frac{1}{c}}}{c^2} < (y - x) \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

(b) Der Grenzwert ist (via der Substitution $t := \frac{1}{x}$) gleich

$$\lim_{t\to 0^+} \Big(\frac{1 - \cos(t)}{t}\Big).$$

Setzen wir nun $f(x) := \cos(x)$, so können wir diesen Grenzwert (unter der Tatsache dass $\cos(0) = 1$) auch lesen (und berechnen) als

$$\lim_{t\to 0^+} \Big(\frac{\cos(0) - \cos(t)}{t - 0}\Big) = -\lim_{t\to 0^+} \Big(\frac{\cos(t) - \cos(0)}{t - 0}\Big) = -(\cos'(0)) = \sin(0) = 0,$$

denn wir wissen dass $\cos(x)$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Aufgabe 4: (20 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 - \frac{1}{n}$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist die Reihe konvergent. (5 P.)

(b) Sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergent mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent. (5 P.)

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und stetige Funktion. Dann existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$, sodass $f(x_0) = x_0$. (5 P.)

(d) Es existiert eine unbeschränkte Folge in $\mathbb{C}$, welche eine Cauchyfolge als Teilfolge besitzt. (5 P.)

Lösung:

(a) ***Falsch***. *Wir setzen $a_1 := 1$ und $a_n := \frac{1}{n-1}$ für $n \geq 2$. Dann gilt für $n \geq 2$, dass*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\left(\frac{1}{(n+1)-1}\right)}{\left(\frac{1}{n-1}\right)}\right| = \left|\frac{n-1}{n}\right| = 1 - \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{n},$$

aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

denn bei dem zweiten Faktor handelt es sich um die harmonische Reihe, welche nach der Vorlesung divergiert.

(b) ***Richtig***. *Mehrmals haben wir in der Übung und Vorlesung gesehen, dass für $x, y \geq 0$ gilt, dass*

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

Dies kann man auch alternativ aus $0 \leq (x-y)^2$ leicht folgern. Somit ist

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty.$$

(c) ***Richtig***. *Da $f(x)$ beschränkt ist, existiert ein $c > 0$, sodass $f(\mathbb{R}) \subset [-c, c]$. Nun betrachten wir die Einschränkung von f auf das Intervall $[-c, c]$, nennen wir diese einfach g. Formal notieren wir es als $g := f_{|[-c,c]}$. Mit anderen Worten haben wir eine wohldefinierte (und ebenfalls stetige) Funktion*

$$g\colon [-c, c] \to [-c, c].$$

Wenn also $g(x)$ einen Fixpunkt hat, so hat auch $f(x)$ einen. Wir betrachten die (ebenfalls stetige) Funktion

$$h : [-c, c] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) - x.$$

Dann hat nämlich $g(x)$ genau dann einen Fixpunkt, wenn $h(x)$ eine Nullstelle hat. Letzteres folgt aber aus dem Zwischenwertsatz, denn

$$h(-c) = g(-c) - (-c) = c - g(-c) \geq 0,$$

und

$$h(c) = g(c) - c \leq 0.$$

(d) ***Richtig***. *Zum Beispiel*

$$a_n := \begin{cases} 1 & , n \text{ gerade} \\ n & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

tut das. Die Teilfolge $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *ist als konstante Folge offensichtlich eine Cauchyfolge, aber* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *selbst ist unbeschränkt.*

Aufgabe 5: (10 Punkte)
Bestimmen Sie alle lokale und globale Minima und Maxima der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^x t(t^2-1)e^{t^2}\, dt.$$

Lösung: *Die Funktion $f(x)$ ist nach dem* ***Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*** *auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit*

$$f'(x) = x(x^2-1)e^{x^2} = x(x-1)(x+1)e^{x^2}.$$

Die möglichen Extremalstellen von $f(x)$ sind die Nullstellen von $f'(x)$, in diesem Fall also genau $x \in \{-1, 0, 1\}$ und keine anderen, denn $e^{x^2} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir beobachten außerdem, dass

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty.$$

Aufgrund der Stetigkeit von $f(x)$ muss somit

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} f'(x)$$

gelten. Es folgt also, dass $f(x)$ kein globales Maximum haben kann, dafür aber ein globales Minimum. Wir sehen sofort, dass die Vorzeichen von $f'(x)$ wie folgt gegeben sind:

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$\operatorname{sign}(f'(x))$	$-$	$+$	$-$	$+$

.

Hierbei können wir die (strikte) Monotonie von $f(x)$ ablesen. Wir sehen, dass $f(x)$ in:

- *$x = -1$ ein lokales Minimum hat,*
- *$x = 0$ ein lokales Maximum hat,*
- *$x = 1$ ein lokales Minimum hat.*

Außerdem handelt es sich bei einem dieser beiden lokalen Minima auch um ein globaes Minimum. Da $f'(x)$ aber antisymmetrisch ist, ist $f(x)$ symmetrisch, und daher gilt

$$f(1) = f(-1),$$

also sind beide Minima global. Alternativ kann man mit der Substitution $u := -t$ von $[0,1]$ nach $[0,-1]$ argumentieren, dass

$$\begin{aligned}
f(-1) &= \int_0^{-1} t(t^2-1)e^{t^2}\, dt \\
&= -\int_{-1}^{0} t(t^2-1)e^{t^2}\, dt \\
&\overset{u:=-t}{=} -\int_{1}^{0} (-u)((-u)^2-1)e^{(-u)^2}\,(-1)du \\
&= \int_0^1 u(u^2-1)e^{u^2}\, du \\
&= f(1).
\end{aligned}$$

Wer sich die Blöße gemacht hat, das Integral auszurechnen, müsste darauf gekommen sein, dass

$$f(1) = 1 - \frac{e}{2} = f(-1).$$

Aufgabe 6: (10 Punkte)

Bestimmen Sie das Integral $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}+t}\,dt$.

Lösung: *Die Funktion*

$$f\colon [1,4] \to [1,2],\ t \mapsto \sqrt{t}$$

ist eine stetig differenzierbare Bijektion. Wir können daher die Substitution $x := \sqrt{t}$ *verwenden. Wir erhalten* $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$*, oder äquivalent* $dt = 2x\,dx$*, und damit*

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}+t}\,dt &= \int_1^2 \frac{1}{x+x^2} \cdot 2x\,dx \\
&= 2 \cdot \int_1^2 \frac{1}{1+x}\,dx \\
&= 2 \cdot [\ln(1+x)]_{x=1}^{x=2} \\
&= 2 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$